

# グラフの極小化可能性と一般化された非自明射影について

新國 亮 (金沢大学教育学部)

(小林 一章氏 (東京女子大学文理学部) との共同研究)

本稿では、空間グラフに関する平面的グラフの非自明射影の概念を、一般のグラフに拡張しようという試みの話をします。以下で簡単に空間グラフについて復習します。 $\mathbb{R}^4$ 内の原点を中心とする単位3次元球面を $S^3$ と表すとき、自然に位相空間とみなした有限グラフ $G$ の $S^3$ への埋め込み $f: G \rightarrow S^3$ を、 $G$ の空間埋め込みまたは単に空間グラフといいます。2つの空間グラフ $f$ と $g$ は、 $S^3$ の向きを保存する同相写像 $\Phi$ が存在して $\Phi \circ f = g$ が成り立つとき、アンビエント・イソトピックであるといえます。また、グラフ $G$ は、2次元球面に埋め込み可能であるとき平面的であるといいますが、いま $S^3$ 内の原点を中心とする単位2次元球面を $S^2$ と表すとき、平面的グラフ $G$ の空間埋め込み $f$ が自明であるとは、 $G$ の $S^2$ への埋め込み $h$ が存在して、 $f$ と $h$ がアンビエント・イソトピックであるときをいいます。

## 1. 平面的グラフの非自明射影

グラフ $G$ の $S^2$ への連続写像 $\varphi$ が $G$ の正則射影であるとは、その多重点が有限個かつ辺の内点同士の横断的な2重点に限るときをいいます。いま、 $G$ の空間グラフ $f$ に対して、 $\varphi$ が $f$ の正則射影であるとは、 $\pi: S^3 - \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\} \rightarrow S^2$ を自然な射影とすると、 $f$ にアンビエント・イソトピックな埋め込み $f': G \rightarrow S^3 - \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\}$ が存在して、 $\varphi = \pi \circ f'$ となることをいいます。このとき、 $\varphi(G)$ を $f$ の正則射影図と呼び、また、 $\varphi$ を例えば $\hat{f}$ と表したり、 $\varphi$ は $f$ に持ち上がると言ったりもします。 $f$ の正則射影図 $\varphi(G)$ の各2重点において、 $\pi$ による上下の情報を付加したものが、 $f$ の正則図にほかなりません。

結び目理論における周知の事実「絡み目の任意の正則図は、各交差点の上下の情報を適当に入れ替えることによって、自明な絡み目の正則図となる」は、言い換えれば、1次元球面の非交和の任意の正則射影 $\varphi$ は、必ず自明な絡み目に持ち上がることを主張しています。ところが、一般の平面的グラフの正則射影については、同様の事実は必ずしも成り立たないことが谷山 [20] によって示されました。

**命題 1.1.** ([20]) 図 1.1 のグラフ $G$ の正則射影 $\varphi$ は、 $G$ の自明な空間埋め込みには持ち上がらない。実際に $\varphi$ を $S^3$ に持ち上げると、必ずHopf絡み目を含む。

そこで、平面的グラフの正則射影で自明な空間埋め込みに持ち上がり得ないもの

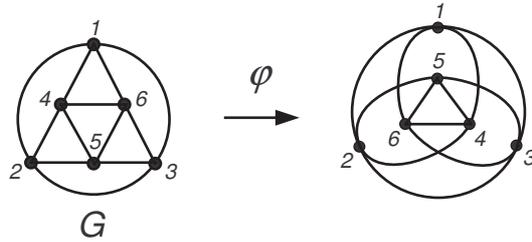


図 1.1: 非自明射影

を**非自明**であると呼び、非自明な正則射影を単に**非自明射影**と呼ぶことにします。また、いかなる非自明射影も持たない平面的グラフを**自明化可能**であると呼びます。例えば1次元球面の非交和は自明化可能であり、一方、図1.1のグラフ $G$ は自明化可能ではありません。自明化可能な平面的グラフについては、谷山 [20], 杉浦-鈴木 [18], 田村 [19] で研究されていて、例えば $\theta_n$  グラフ, 手錠グラフ, 4頂点完全グラフ  $K_4$  などは自明化可能であることが知られています。即ち、空間  $\theta_n$  曲線, 空間手錠グラフや  $K_4$  の空間埋め込みの正則図は、各交差点の上下の情報を適当に入れ替えることによって、それぞれ自明な空間埋め込みの正則図にできるわけです。

一方、自明化可能でない平面的グラフについては、Robertson, Seymour による**グラフ・マイナー理論**を援用した研究が進められて来ました。グラフ  $H$  がグラフ  $G$  の**マイナー**であるとは、 $H$  が  $G$  から辺の縮約及び辺の除去の有限列で得られるときをいい、特に  $H \neq G$  のとき**プロパーマイナー**と呼ばれます。いま、平面的グラフ  $G$  の正則射影  $\varphi$  が自明な空間埋め込みに持ち上がるなら、 $G$  の任意の部分グラフ  $H$  において明らかに  $\varphi|_H$  も自明な空間埋め込みに持ち上がります。また、辺を縮約して得られるプロパーマイナー  $H'$  においても、もし  $H'$  が非自明射影を持つならば、 $G$  も非自明射影を持つことが示されます。これより、自明化可能性はマイナーに関して“閉じている”，即ち次の命題が成り立ちます。

**命題 1.2.** ([20]) 平面的グラフ  $G$  が自明化可能なら、 $G$  の任意のマイナー  $H$  も自明化可能である。

そこでいま、 $\Omega(T)$  を自明化可能でない平面的グラフでその任意のプロパーマイナーは自明化可能であるようなもの全体の集合とします。このとき、命題1.2のマイナーに関して閉じているという性質、及びRobertson-Seymourのグラフマイナー定理 [11] の帰結として、以下の事実が導かれます。

**系 1.3.**  $\Omega(T)$  は有限集合である。

自明化可能な平面的グラフは「 $\Omega(T)$  の元をマイナーに含まない」という形で特徴付けられますから、 $\Omega(T)$  の元が有限個であることは大きな意味を持ちます。 $\Omega(T)$

を自明化可能性に関する**障害集合**と呼び、その元を自明化可能性に関する**禁止グラフ**と呼びます。図 1.1 の  $G$  は、実は禁止グラフのうちの 1 つです。現在までに杉浦-鈴木 [18], 筆者-小沢-谷山-堤 [7], 筆者 [8] によって 17 個の禁止グラフが発見されていますが、まだ完全決定には至っていません。

ところで、自明化可能性は、自明な空間グラフが定義可能な平面的グラフについての性質ですが、非平面的グラフの正則射影についてはどうでしょうか？ つまり、どう  $S^3$  に持ち上げて、ある意味結ばった、あるいは絡まった空間グラフが生じてしまうような、非平面的グラフの正則射影を研究することはできないのでしょうか。そのためには、必然的に標準的空間グラフを研究する必要があります。

## 2. 標準的空間グラフ

グラフの標準的空間埋め込みの研究とは、大雑把に言えば、「最もほどけている」空間グラフの追求です。以下の 4 つの条件が、標準的空間グラフが持つべき性質として期待されるものです。

- 性質 2.1. (1) 自明な結び目、及び自明な絡み目の一般化となっている。  
(2) 外部空間はハンドル体である。従って補空間の基本群は自由群である。  
(3) 任意のグラフは標準的空間埋め込みを持つ。  
(4) グラフの標準的空間埋め込みは、何らかの意味で一意である。

グラフが平面的な場合は、標準的空間グラフとして自明な空間グラフを採用すれば、明らかに条件 (1), (2) を満たしており、また、平面的グラフの自明な空間埋め込みは  $S^3$  のアンビエント・イソトピーの下で一意であることが知られているので (Mason [6]), 条件 (4) も満たします。ちなみに、条件 (2) に関連して、自明な空間グラフであるための必要十分条件は、任意の部分空間グラフについて補空間の基本群が自由群であることも示されており (Scharlemann-Thompson [16]), とても理想的な標準的空間埋め込みとなっています。しかし非平面的グラフには定義されないので、条件 (3) を満たしません。

そこで、非平面的グラフの標準的空間埋め込みとしてふさわしいものを定義することが、大きな研究目標となります。しかし、後述するように、どう  $S^3$  に埋め込んでも非自明な部分空間埋め込みを含んでしまうグラフが存在するため、これは大変難しい問題です。これまでに、空間グラフが含む結び目たちに円板を張るというアイデアによる、**結び目に関して局所自明な空間埋め込み** (小林 [3], 遠藤-大槻 [2], 新庄 [17]), 本型の空間への埋め込みを考えるというアイデアによる、**空間グラフの本表現** (小林 [3], 大槻 [9]), また、3次元多様体論からのアプローチ (小沢-堤 [10]) などが試みられて来たのですが、<sup>1</sup> 未だ満足 of いく結果は得られていないというのが現状のように思います。

<sup>1</sup>[4] の第 4 章では、標準的空間グラフに関する '90 年代前半の一連の研究について詳しく述べられています。

そこで今回, 非平面的グラフの標準的空間グラフの候補として, **極小埋め込み**なる新しい概念を導入します. 以下では,  $\gamma(G)$  はグラフ  $G$  の**最小種数**, 即ち  $G$  を埋め込むことができる向き付け可能な閉曲面の種数の最小値を表します. 明らかに,  $G$  が平面的であることと  $\gamma(G) = 0$  は互いに必要十分条件です. また,  $F_n$  を  $\mathbb{S}^3$  の種数  $n$  の **Heegaard 曲面**,  $(V_1, V_2; F_n)$  を  $\mathbb{S}^3$  の **Heegaard 分解** とするとき,  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}, \{D'_1, D'_2, \dots, D'_n\}$  はそれぞれ  $V_1, V_2$  の**完備メリディアン円板系**で,  $D_i \cap D'_j$  は  $i \neq j$  のとき空,  $i = j$  のとき 1 点であるようなものとします. このとき,  $m_i = F_g \cap D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を  $F_n$  の**標準的メリディアン**,  $l_i = F_g \cap D'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を  $F_n$  の**標準的ロンジチュード**と呼び,  $\{(m_i, l_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  を  $F_g$  の**標準的メリディアン-ロンジチュード系**と呼ぶことにします.

**定義 2.2.**  $G$  は  $\gamma(G) = n$  なるグラフとし,  $F_n$  は  $\mathbb{S}^3$  の種数  $n$  の Heegaard 曲面,  $\{(m_i, l_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  は  $F_n$  の標準的メリディアン-ロンジチュード系とする.  
(1)  $\min(G) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  を,  $n = 0$  (即ち  $G$  は平面的) なら  $\min(G) = 0$ ,  $n \geq 1$  (即ち  $G$  は非平面的) なら

$$\min(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n |h(G) \cap m_i| + \sum_{i=1}^n |h(G) \cap l_i| \mid h: G \rightarrow F_n \text{ は埋め込み} \right\}$$

と定義する.

(2)  $G$  の空間埋め込み  $f$  が**極小埋め込み**であるとは,  $\min(G)$  を実現するような  $F_n$  への埋め込み  $h: G \rightarrow F_n \subset \mathbb{S}^3$  が存在して,  $f$  と  $h$  は  $\mathbb{S}^3$  においてアンビエント・イソトピックであるときをいう.

明らかに極小埋め込みは性質 2.1 における条件 (1) を満たし, 更に定義から明らかに, 平面的グラフの極小埋め込みは自明な空間埋め込みと一致します. また, 最小種数  $g$  を実現する閉曲面  $F_g$  に埋め込まれたグラフは, その  $F_g$  における補空間が開 2 胞体の非交和となっており, このことから  $\mathbb{S}^3$  における外部空間はハンドル体となるので, 従って条件 (2) を満たします. 更に一般のグラフに対して定義しましたから, 条件 (3) も満たしています.<sup>2</sup> 条件 (4) に関してはとりあえず後回しにして, まずは極小埋め込みの具体例を見ていきましょう.

**例 2.3.**  $p$  頂点完全グラフ  $K_p$  は,  $p = 5, 6, 7$  のときに限り  $\gamma(K_p) = 1$  であることが知られています. このとき,  $\min(K_5) = 2$ ,  $\min(K_6) = 4$ ,  $\min(K_7) = 6$  で, 実際に図 2.1 は  $K_5, K_6, K_7$  の極小埋め込みの例です. 特に  $K_6$  は**絡み目に関して内在的非自明**, 即ち  $K_6$  の任意の空間埋め込みは必ず非分離 2 成分絡み目を含み,  $K_7$  は**結び目に関して内在的非自明**, 即ち  $K_7$  の任意の空間埋め込みは必ず非自明な結び目を含むことに注意します (**Conway-Gordon の定理** [1]).

<sup>2</sup>極小埋め込みの定義において, 「 $\min G$  を実現する」を外しても, 実は性質 2.1 の条件 (1), (2), (3) は満たされますが, そのような空間埋め込みは一般に無数に存在します. 例えば, 任意の自然数  $n$  に対し,  $(2, 2n+1)$  トーラス結び目を含む  $K_5$  の空間埋め込み  $h: G \rightarrow F_1 \subset \mathbb{S}^3$  が存在します.  $\min(G)$  を実現することを要請したのは, そのような理由によります.

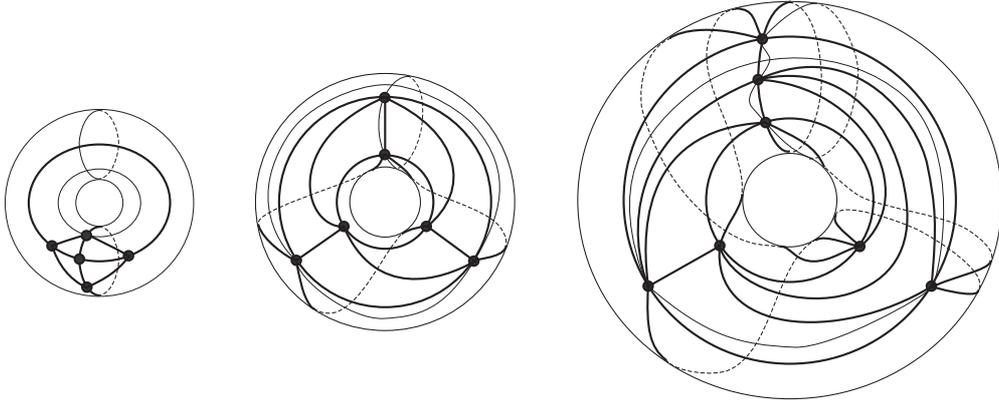


図 2.1:  $K_5, K_6, K_7$  の極小埋め込み

例 2.3 において, 図 2.1 の埋め込みがそれぞれ極小埋め込みであることを決定するには, 例えば以下の方法を用います. いま,  $\gamma(G) = n \geq 1$  なるグラフ  $G$  に対し,

$$\text{gvsk}(G) = \min \{|U| \mid U \subset V(G), \gamma(G - U) = n - 1\}$$

を,  $G$  の一般化された頂点歪みと呼ぶことにすると,<sup>3</sup> 極小埋め込みに関して次の補題が成り立ちます.

**補題 2.4.**  $G$  は  $\gamma(G) = n (\geq 1)$  なる非平面的グラフで,  $h : G \rightarrow F_n \subset \mathbb{S}^3$  はその極小埋め込みとする. このとき,

$$|h(G) \cap m_i| \geq \text{gvsk}(G), |h(G) \cap l_i| \geq \text{gvsk}(G)$$

が成り立つ ( $i = 1, 2, \dots, g$ ). 従って特に  $\min(G) \geq 2n \cdot \text{gvsk}(G)$  である.

実際, もし  $|h(G) \cap m_i| = r < \text{gvsk}(G)$  だったとすると,  $m_i$  は  $h(G)$  と  $r$  個の頂点  $h(v_1), h(v_2), \dots, h(v_r)$  ( $U = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V(G)$ ) で交わっているとしてよく, このとき  $F_n$  を  $D_i$  で圧縮して得られる種数  $n - 1$  の閉曲面に  $G - U$  が埋め込まれます. しかし  $\text{gvsk}(G) > r$  より  $\gamma(G - U) = n$  ですから, 矛盾が生じます.

明らかに  $\text{gvsk}(K_5) = 1, \text{gvsk}(K_6) = 2, \text{gvsk}(K_7) = 3$  であり, 従って補題 2.4 より  $\min(K_5) \geq 2, \min(K_6) \geq 4, \min(K_7) \geq 6$  です. これらの下限を図 2.1 の埋め込みが実現していますので, 従って極小埋め込みとなります. より正確には,  $p = 5, 6, 7$  に対し,  $h : K_p \rightarrow F_1 \subset \mathbb{S}^3$  が極小埋め込みであるための必要十分条件は,

$$|h(K_p) \cap m_1| = |h(K_p) \cap l_1| = \text{gvsk}(K_p)$$

が成り立つことです.

<sup>3</sup>ここで  $V(G)$  は  $G$  の頂点集合で,  $G - U$  は  $G$  から  $U$  及び  $U$  の頂点に接続している辺を全て取り除いて得られる  $G$  の部分グラフを表します.

**例 2.5.** グラフが絡み目に関して内在的非自明でないという性質はマイナーに関して閉じており, その障害集合  $\Omega(\mathcal{L})$  は **Petersen 族** と呼ばれる 7 つのグラフから成ることが Sachs [15] 及び Robertson-Seymour-Thomas [12, 13, 14] により証明されています. 例えば  $K_6$ , **完全 3 組グラフ**  $K_{3,3,1}$ , **Petersen グラフ**  $PG$  などが Petersen 族に含まれています. このとき, Petersen 族に属する任意のグラフ  $P$  について,  $\gamma(P) = 1$  かつ  $\min(P) = 4$  となり, 図 2.2 は  $K_{3,3,1}$  及び  $PG$  の極小埋め込みの例です. 実際,  $h : P \rightarrow F_1 \subset S^3$  が極小埋め込みであるための必要十分条件は,

$$|h(P) \cap m_1| = |h(P) \cap l_1| = \text{gvsk}(P) = 2$$

が成り立つことです.

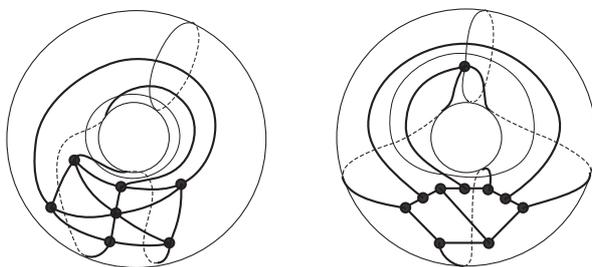


図 2.2:  $K_{3,3,1}$ ,  $PG$  の極小埋め込み

### 3. 一般化された非自明射影

さて, 極小埋め込みの概念を用いて, 平面的グラフの非自明射影を以下のように非平面的グラフに拡張します.

**定義 3.1.** (1) グラフ  $G$  の正則射影  $\varphi$  が**非極小**であるとは, あらゆる極小埋め込みに持ち上がり得ないときをいう. このとき,  $\varphi$  を**非極小射影**と呼ぶ.

(2) いかなる非極小射影も持たないグラフ  $G$  を, **極小化可能**であると呼ぶ.

$G$  が平面的であれば, 極小化可能性は明らかに自明化可能性と一致します.

**例 3.2.** 例えば, 図 3.1 のグラフ  $G$  の正則射影  $\varphi$  を考えます. この  $\varphi$  は,  $S^3$  に持ち上げると必ず Hopf 絡み目を含むことがすぐにわかります (谷山-塚本 [21] で取り上げられた例). ところが, いま  $\gamma(G) = 1$  で, 埋め込み  $h : G \rightarrow F_1 \subset S^3$  が極小埋め込みであるための必要十分条件は,

$$|h(G) \cap m_1| = |h(G) \cap l_1| = 1$$

となることです. 即ち  $\min(G) = 2$  となりますが, Hopf 絡み目は (2, 2) トーラス絡み目なので, もし  $h(G)$  が Hopf 絡み目を含むならば  $\min(G) \geq 4$  となるはずですが, 従って  $h(G)$  は Hopf 絡み目を含み得ません. 従って  $\varphi$  は非極小射影です.

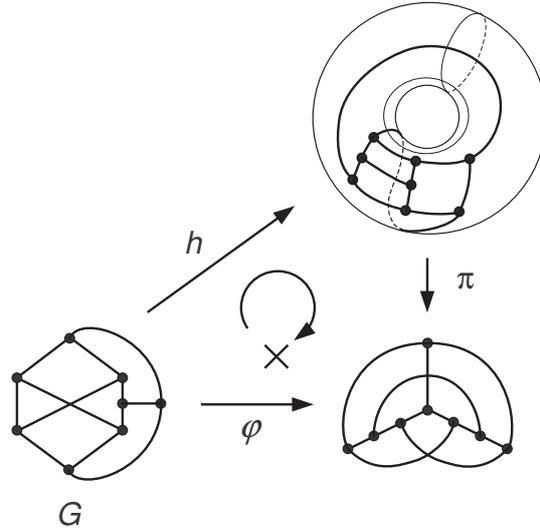


図 3.1: 非極小射影

そこで、命題 1.2 に対応した内容を考えたいのですが、実は極小化可能性においては、平面的グラフの自明化可能性とその様相が著しく異なります。実際、次の例のように、グラフ  $G$  の極小埋め込みに持ち上がる正則射影  $\varphi$  において、 $G$  の部分グラフ  $H$  が存在して、 $\varphi|_H$  が極小埋め込みに持ち上がらない場合があります。

**例 3.3.** 例えば、図 3.2 の左に示した  $K_6$  の正則射影を考えます。これは例 2.3 で挙げた  $K_6$  の極小埋め込みに持ち上がるので、非極小射影ではありません。しかし部分グラフ  $H$  として、図 1.1 のグラフ  $G$  を含んでおり、命題 1.1 で述べた通り、 $\varphi|_H$  は非自明射影、即ち非極小射影です。

上の例では  $1 = \gamma(K_6) > \gamma(H) = 0$  だったのですが、実はグラフとその部分グラフとで最小種数が変わらない場合にも、このような例が存在します。例えば図 3.2 の右に示した Petersen グラフ  $PG$  の正則射影を考えます。これは例 2.5 で挙げた  $PG$  の極小埋め込みに持ち上がるので、非極小射影ではありません。しかし部分グラフ  $H$  として図 3.1 のグラフ  $G$  を含んでおり、例 3.2 で述べた通り、 $\varphi|_H$  は非極小射影です。この場合、 $\gamma(PG) = \gamma(H) = 1$  です。

例 3.3 は、極小化可能性がマイナーに関して閉じるかどうかを、自明化可能性の場合と同様の方法では示すことができないことを意味しています。

**問題 3.4.** グラフ  $G$  が極小化可能なら、そのマイナー  $H$  も極小化可能か？

筆者はこの問題には否定的です。即ち、このままでは極小化可能性はマイナーに関して閉じないであろうと予想しています (問題 4.8 参照)。そこで、極小化可能性を階層的に定義し直すことを考えます。

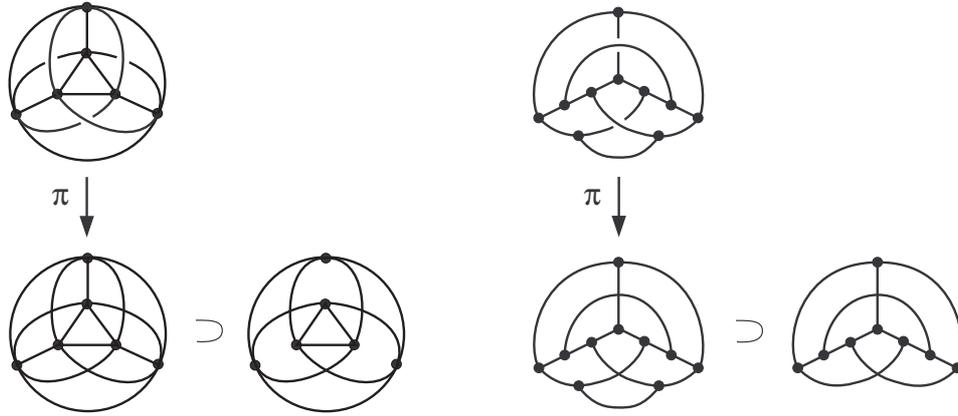


図 3.2: 非極小射影ではないが, 部分的に非極小射影を含む例

#### 4. $(n, k)$ 極小化可能性

例 3.3 の 2 つ目の例において, グラフ  $G$  の非極小射影ではない正則射影  $\varphi$  において,  $\gamma(H) = \gamma(G)$  なる  $G$  の部分グラフ  $H$  が存在して,  $\varphi|_H$  が非極小射影となる例があることを見ました. その際に  $\min(G) > \min(H)$  となっていることに着目して, 以下の定義を与えます.

**定義 4.1.**  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対し,

- (1) グラフ  $G$  が  $(n, k)$  型であるとは,  $\gamma(G) = n, \min(G) = k$  のときをいう.
- (2) グラフ  $G$  が  $(n, k)$  極小化可能であるとは, 以下の条件 (i), (ii), (iii) のいずれかを満たすときをいう.
  - (i)  $\gamma(G) < n$ ,
  - (ii) ある  $q < k$  に対し,  $G$  は  $(n, q)$  型である,
  - (iii)  $G$  は  $(n, k)$  型で, いかなる非極小射影も持たない.

このとき, グラフ  $G$  が  $(n, k)$  極小化可能でないとは, 定義から,

- (i)'  $\gamma(G) \geq n + 1$ ,
- (ii)' ある  $q \geq k + 1$  に対し,  $G$  は  $(n, q)$  型である,
- (iii)'  $G$  は  $(n, k)$  型で, 非極小射影を持つ

のいずれかを満たすときとなります. つまり,  $G$  がそもそも  $F_n$  に埋め込めないか, 埋め込めたとしても  $\min(G) > k$  となるか,  $(n, k)$  型だとしても非極小射影を持つ場合に,  $(n, k)$  極小化可能でないわけです. こちらを考えたほうが, もとの  $(n, k)$  極小化可能性を理解しやすいかもしれません. しかも, この  $(n, k)$  極小化可能性はマイナーに関して閉じることがわかります.

**定理 4.2.**  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対し, グラフ  $G$  が  $(n, k)$  極小化可能なら, その任意のマイナー  $H$  も  $(n, k)$  極小化可能である.

そこで,  $(n, k)$  極小化可能性に関する障害集合  $\Omega_{n,k}$  が自明化可能性の場合と全く同様に定義され, グラフマイナー定理, 及び定理 4.2 によって, 次が示されます.

**系 4.3.** 各  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対し,  $\Omega_{n,k}$  は有限集合である.

**例 4.4.** 例えば  $(0, 0)$  極小化可能性は平面的グラフの自明化可能性と一致し,  $\Omega_{0,0} = \Omega(\mathcal{T}) \cup \{K_5, K_{3,3}\}$  です. また  $(0, k)$  極小化可能性 ( $k \geq 1$ ),  $(1, 0)$  極小化可能性,  $(1, 1)$  極小化可能性はそれぞれグラフの平面性と一致するので,  $\Omega_{0,k \geq 1} = \Omega_{1,0} = \Omega_{1,1} = \{K_5, K_{3,3}\}$  となります (**Kuratowski の定理** [5]).

さて, 以下で特に  $(1, 2)$  極小化可能性について考えてみます. 極小埋め込みを定義した際, 性質 2.1 の条件 (4) に関する考察を後回しにしておりましたが,  $(1, 2)$  型グラフの極小埋め込みについては, 次が成り立ちます.

**命題 4.5.**  $G$  は  $(1, 2)$  型とし,  $f, g$  を  $G$  の極小埋め込みとする. このとき, ある  $\mathbb{S}^3$  の同相写像  $\Phi$  が存在して,  $\Phi(f(G)) = g(G)$  となる.

つまり,  $(1, 2)$  型グラフの極小埋め込みは, グラフの頂点及び辺のラベルや鏡像を無視すれば,  $\mathbb{S}^3$  のアンビエント・イソトピーで一意となります. これは Robertson-Seymour-Thomas [14] の理論の直接の応用により示されます.<sup>4</sup> 例えば例 3.2 で挙げた  $(1, 2)$  型グラフ  $G$  の極小埋め込みは, 上記の意味で, そこで挙げた  $h$  に限るといことです.  $(1, 2)$  極小化可能でない  $(1, 2)$  型グラフは, 例 3.2 で挙げたグラフの他にも, 以下に挙げるように幾つか見つかっています.

**例 4.6.** (1)  $K_5$  と図 1.1 のグラフ  $G$  の 1 点和は,  $(1, 2)$  型で, かつ  $(1, 2)$  極小化可能でない. もう少し一般に,  $(1, 2)$  型グラフ  $G$  と, 自明化可能性に関する禁止グラフで現在知られているもの  $G_i$  の 1 点和<sup>5</sup>は,  $(1, 2)$  型で, かつ  $(1, 2)$  極小化可能でない. (2) 図 4.1 の  $(1, 2)$  型グラフ  $N_1, N_2, \dots, N_8$  は  $(1, 2)$  極小化可能でない.

例 4.6 (1) は, 自明化可能性に関する障害を利用した構成によるものです. 一方, (2) に関して, 例えば  $N_1$  は, その任意の平面的プロパーマイナーは自明化可能であることがわかるので, 自明化可能性に関する障害には依っていません. そこで, 特に  $\Omega_{1,2}$  の元, 即ち  $(1, 2)$  極小化可能性に関する禁止グラフを調べるのが次の目標になります. ところが, そもそも,  $(1, 2)$  型のグラフが必ずどちらかをマイナーに含んでいる  $K_5, K_{3,3}$  が  $(1, 2)$  極小化可能かどうかはまだ未解決です. もしどちらも  $(1, 2)$  極小化可能であれば,  $K_5$  もしくは  $K_{3,3}$  と  $G_i \in \Omega(\mathcal{T})$  ( $i = 1, 2, \dots, 17$ ) との 1 点和は全て  $\Omega_{1,2}$  に属することが示されます.

<sup>4</sup>未定義用語が多くなりますが, 一応, 流れを簡単に述べます. [14] において, **Kuratowski 連結な平坦グラフ**の  $\mathbb{S}^3$  への**パネル埋め込み**は, 命題 4.5 の意味で一意であることが示されています. ここでいま,  $(1, 2)$  型グラフ  $G$  の極小埋め込みはパネル埋め込みとなるので  $G$  は平坦で, かつ  $(1, 2)$  型であることから Kuratowski 連結であることがわかるので, 従って結果が得られます.

<sup>5</sup>2 つのグラフ  $G_1, G_2$  の 1 点和とは,  $G_1$  のある 1 頂点と  $G_2$  のある 1 頂点を同一視して得られるグラフのこと.

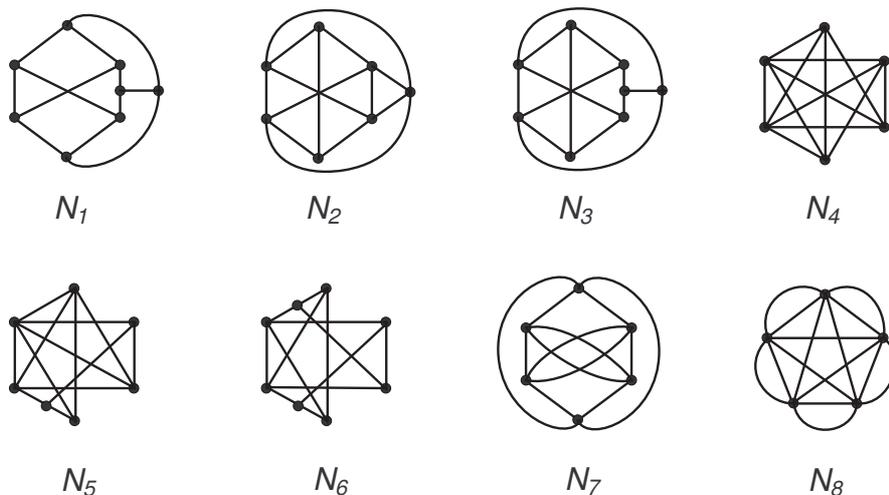


図 4.1: (1, 2) 型かつ (1, 2) 極小化可能でないグラフ

**問題 4.7.** (1)  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  は (1, 2) 極小化可能か?

(2)  $N_1, N_2, \dots, N_8 \in \Omega_{1,2}$  か?

最後に, 問題 3.4 に関連して, 以下の問題を挙げておきます.

**問題 4.8.** Petersen 族に属するグラフは (1, 4) 極小化可能か?

Petersen 族は全て (1, 4) 型ですから, 要するに Petersen 族は極小化可能か? ということです.  $K_6$  や  $PG$  は Petersen 族に属し, それらは例 3.3 で述べたように, 非極小射影ではない正則射影  $\varphi$  で,  $G$  のある部分グラフ  $H$  への制限  $\varphi|_H$  が非極小射影となるようなものを持つのでした. 従って, 問題 4.8 が肯定的に解決されれば, 問題 3.4 は否定的に解決されます. 即ち, 我々の階層的な定義が妥当であることをサポートするのですが, 現在のところ, どうやって証明したら良いかわかりません.

## 参考文献

- [1] J. H. Conway and C. McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.
- [2] T. Endo and T. Otsuki, Notes on spatial representations of graphs, *Hokkaido Math. J.* **23** (1994), 383–398.
- [3] K. Kobayashi, Standard spatial graph, *Hokkaido Math. J.* **21** (1992), 117–140.
- [4] 小林 一章, 空間グラフの理論, 培風館, 1995.
- [5] C. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, (French) *Fund. Math.* **15** (1930), 271–283.

- [6] W. K. Mason, Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 269–290.
- [7] R. Nikkuni, M. Ozawa, K. Taniyama and Y. Tsutsumi, Newly found forbidden graphs for trivializability, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), 523–538.
- [8] R. Nikkuni, Regular projections of spatial graphs, to appear in the Proceedings of the International Workshop on Knot Theory for Scientific Objects, Osaka City Advanced Mathematics Institute Studies Vol. 1.
- [9] T. Otsuki, Knots and links in certain spatial complete graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **68** (1996), 23–35.
- [10] M. Ozawa and Y. Tsutsumi, Triviality of spatial graphs via minor theory and 3-manifolds, 研究集会「結び目のトポロジー V」報告集 (2003), 220–225.
- [11] N. Robertson and P. Seymour, Graph minors XVI. Wagner’s conjecture, to appear?
- [12] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Kuratowski chains, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 127–154.
- [13] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Petersen family minors, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 155–184.
- [14] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Sachs’ linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.
- [15] H. Sachs, On spatial representations of finite graphs, *Finite and infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981)*, 649–662, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **37**, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [16] M. Scharlemann and A. Thompson, Detecting unknotted graphs in 3-space, *J. Diff. Geom.* **34** (1991), 539–560.
- [17] R. Shinjo, Bounding disks to a spatial graph, *J. Knot Theory Ramifications* **15** (2006), 1225–1230.
- [18] I. Sugiura and S. Suzuki, On a class of trivializable graphs, *Sci. Math.* **3** (2000), 193–200.
- [19] N. Tamura, On an extension of trivializable graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **13** (2004), 211–218.
- [20] K. Taniyama, Knotted projections of planar graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3575–3579.
- [21] K. Taniyama and T. Tsukamoto, Knot-inevitable projections of planar graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **5** (1996), 877–883.

920-1192 金沢市角間町 金沢大学教育学部数学教室

nick@ed.kanazawa-u.ac.jp