力学系としてのセル・オートマトン

川原田 茜　(北海道大学大学院理学院数学専攻D1)*

トポロジー新人セミナー2010

1. はじめに

セル・オートマトン（cellular automaton）とは有限オートマトンをd次元格子空間内に配置してそれぞれのセルを並列に更新していく数理モデルです。元々は生物の自己再生の仕組みを模す機械としてフォン・ノイマン（von Neumann）により研究が成され、単純な規則から多様な挙動を生み出すことができるために現在は複雑系分野で広く用いられています。一方セル・オートマトンはコンパクト距離空間上の離散力学系の一種とみなすこともできるので、数学的な観点から研究することも可能です。

下の二つの図を見てください。図1はシェルピンスキー・ギャスケット（Sierpinski gasket）と呼ばれるフラクタル図形で、無限個の自己相似的な三角形によって構成されています。図2の方は砂嵐のようにも見えますが、全体としての規則性はあまり見えてきません。

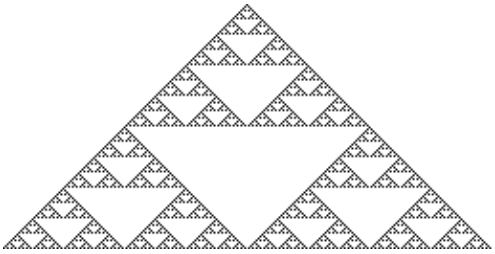

図 1: シェルピンスキー・ギャスケット

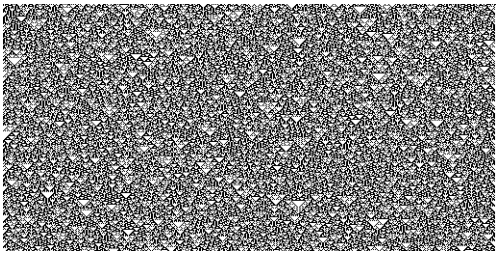

図 2: 砂嵐（？）

実はこれら二つの図は同じセル・オートマトンによって描かれています。まず一番上の行を初期状態とし、各セルには二種類の状態、0または1を与えます。（ただし0を□、1を■で表す。）各セルは、自身と隣接する二つのセルの状態によって表1の規則に従い、状態を更新します。全てのセルに等しくこの規則を適用した更新結果を下の行に描き連

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0

表 1: ルール90の局所規則

ね、この操作を繰り返していくことで上のような図を得ます。すると同じセル・オートマトンによって描かれた図でも、初期状態を変えただけでこれほど表情の違った図形ができてきます。

セル・オートマトンはこの他にも様々な興味深い図形を描きだすことが可能です。それらは自然界に存在する生物や化学反応現象等と関連付けられ、セル・オートマトンによるパターン形成の問題として盛んに研究されています。

* e-mail: aka@math.sci.hokudai.ac.jp
web: http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~aka/

2. 力学系としてのセル・オートマトン

次にセル・オートマトンを数学的に扱うために、セル・オートマトンを離散力学系として記述してみます。

力学系（dynamical systems）理論とは、何らかの物理系を時間発展させることで、その系がどのように変化するかを数学的に記述し、その性質や漸近挙動を明らかにしようとする研究分野です。大まかにいうと ”空間 ”に対して ”規則 ”を与え、そこでの ”時間発展 ”を観察するということです。ここでは時間発展は全て離散とし（すなわち写像の反復によって時間発展を考える）、以下 F^n は写像 F の n 回**合成** (iteration) を表すこととします。

すると d 次元セル・オートマトン ($d \geq 1$) は次のように定義されます。有限集合 $A = \{0, \ldots, n-1\}$ ($n \geq 1$) を**状態集合** (state set) とし、$X = A^{\mathbb{Z}^d}$ を**配置空間** (configuration space) とします。有限個の異なるベクトル $v_1, \ldots, v_t \in \mathbb{Z}^d$ によって与えられる写像 $f : A^t \to A$ を**局所規則** (local rule) とするとき、

定義 1. d次元セル・オートマトン $F : X \to X$ は $x \in X$ に対して

$$(Fx)_{(i_1,\ldots,i_d)} = f(x_{(i_1,\ldots,i_d)+v_1} \cdot \ldots, x_{(i_1,\ldots,i_d)+v_t}),$$

これは空間 X 上の連続写像になっています。ベクトル $u \in \mathbb{Z}^d$ に対して**シフト写像** $\sigma_u : X \to X$ を

$$\sigma_u(x) = x + u,$$

で定義すると写像 F は空間 X 上のシフト可換、つまり $F \circ \sigma_u = \sigma_u \circ F$ を満たしています。次に X 上の距離関数 d を与えます。二点 $x, y \in X$ に対して

$$d(x, y) = 2^{-\alpha}, \quad \alpha = \min\{\max\{|i_1|, \ldots, |i_d|\} \mid x_{(i_1,\ldots,i_d)} \neq y_{(i_1,\ldots,i_d)}\}.$$

とすると、(X, d) はコンパクト距離空間になります。ここまで整えると、セル・オートマトンはコンパクト距離空間におけるシフト可換な連続写像となり、数学的にもかなり良い性質をもった写像として扱うことができるようになります。

先程シェルピンスキー・ギャスケットと砂嵐を描いたセル・オートマトンは次のように記述されます。

例 1. 状態集合 $A = \{0, 1\}$、配置空間 $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ における一次元セル・オートマトン $F : X \to X$,

$$(Fx)_k = x_{k-1} + x_{k+1} \qquad \mathrm{mod}2.$$

このセル・オートマトンはルール 90 と呼ばれています。セルの更新結果の状態を並べると 01011010 となっており（上の表 1 参照）、これを二進数の数とみなしてを十進数の表記にすると 90 になります。同様にして一次元 elementary セル・オートマトンに $2^8 = 256$ 個の名前を付け、その挙動の分類や解析が行われています。

3. 研究テーマとこれまでに得られた結果

私の興味は主に多次元セル・オートマトンの位相エントロピーにあります。位相エントロピーとは力学系の ”軌道の多様さ ”を計るような量で、ある力学系の位相エントロピーが正の値をとるならばカオスが起きていると見做す見方もあり、複雑現象との関連も密接なキーワードです。しかし一般的に位相エントロピーはどんな力学系に関しても簡単

に求められるというものではなく、セル・オートマトンに関してもいくつかの限られたクラスに関する結果しか知られていません。特に多次元非線型のクラスにおいてはそれを数学的に扱った結果自体が少なく、まだほとんど解明されていないのが現状です（表2参照）。そこで私は修士論文で、あるalmost equicontinuousな二次元非線形セル・オートマトンを取り上げ、これに関する解析と位相エントロピーの評価を行いました。

3.1. 結果概略

まずセル・オートマトンの位相エントロピーの定義を与えておきます。$\mathbb{Z}^d$の有限部分集合Sに対して$W(S,n,F) := \{(x_S,(Fx)_S,(F^2x)_S,\dots,(F^nx)_S)|x \in X\}$を$x$の軌道の各ステップで$S$内に出現し得る配置の集合とするとき、

定義 2. セル・オートマトン(X,F)の**位相エントロピー**は

$$h_{top}(F) = \sup_{S\subset\mathbb{Z}^d} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |W(S,n,F)|.$$

数列$\log |W(S,n,F)|$の劣加法性により極限は存在します。

ここで力学系(F,X)上の点に対する定義をいくつか挙げておきます。$F^px = x$を満たすような自然数pが存在するとき、最小のpに対して点$x \in X$は周期pの**周期点**(periodic point)であるといい、特に$Fx = x$となるとき点xはFの**不動点**(fixed point)となります。ある自然数qに対してF^qxが周期点となるとき、点$x \in X$は**前周期**qの**最終的周期的点**(eventually periodic point)とよびます。任意の$\epsilon > 0$に対してあるδが存在して

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(F^nx,F^ny) < \epsilon \quad \text{for all } n > 0.$$

を満たすとき点xは**equicontinuous point**であるといい、これはこの点を初期値に持つ軌道のある種の安定性を表しています。次に力学系(X,F)に対する定義を与えます。

(1) (X,F)上の点が全てequicontinuous pointであるとき、(X,F)は（力学系として）**equicontinuous**、

(2) (X,F)上にequicontinuous pointが存在するとき、(X,F)は**almost equicontinuous**、

(3) (X,F)上にequicontinuous pointが存在しないとき、(X,F)は**sensitive**、

(4) (X,F)上の任意の$x \neq y \in X$に対してある$n \geq 0$が存在して$d(T^nx,T^ny) \geq \epsilon$を満たすような$\epsilon > 0$が存在するとき、$(X,F)$を**positively expansive**であるといいます。

セル・オートマトンの位相エントロピーは表2に載っているクラスについては既に分類されています。そこで修士論文においては、非線型多次元セル・オートマトンのうちalmost equicontinuousなセル・オートマトンとして次の(X,F)を取り上げました。$X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$上

$$(Fx)_{(i,j)} = x_{(i,j)} + x_{(i-1,j)}x_{(i+1,j)} + x_{(i,j-1)}x_{(i,j+1)} \qquad \mathrm{mod}2.$$

すると

h_{top}	0	finite	∞
$d=1$	equicontinuous[1]	expansive[2]	———
$d \geq 2$	equicontinuous[1] linear(if equiconti.)[6]	Meyerovitch's example[5]	spaceship(glider)[4] linear(if sensitive)[6]

表 2: セル・オートマトンの位相エントロピー

定理 1. セル・オートマトン (X, F) の位相エントロピーは

$$h_{top}(F) = \infty.$$

となることが示せました。（詳細と証明は A.Kawaharada[3] にあります。）つまり、equicontinuous ならば位相エントロピーはゼロでしたが、これが少し崩れた almost equicontinuous な場合にはその位相エントロピーが発散してしまうような例が存在するということが証明されました。すると今度は almost equicontinuous なクラス全体としての位相エントロピーはどのような値を取り得るのか？、また sensitive なクラスで位相エントロピーがゼロとなるものが存在するか？などなど気になる点はたくさん出てきますが、これは今後の課題です。

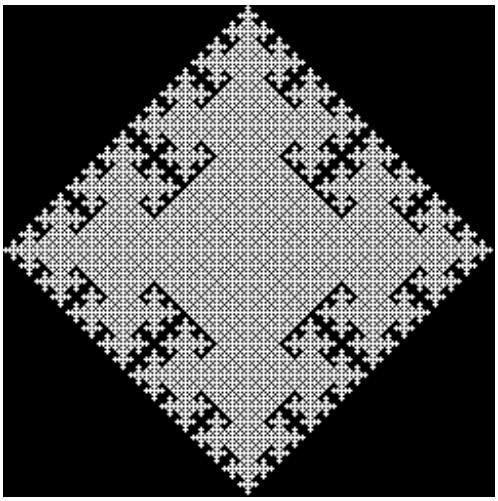

図 3: (X, F) のある点（その 1）

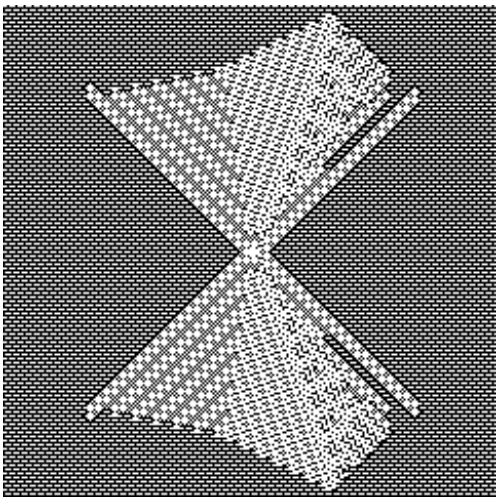

図 4: (X, F) のある点（その 2）

またこの almost equicontinuous 二次元セル・オートマトンは初期状態の取りかたによって図 3 や図 4 が見えたり、また切断面には図 5 や図 6 のようなものがでてきたりします。もちろんこういった絵を描くこと自体は私の研究目的ではありませんが、デザイン的に冴えたものとしばしば遭遇できるのはやはり見ていて楽しく、飽きないものです。

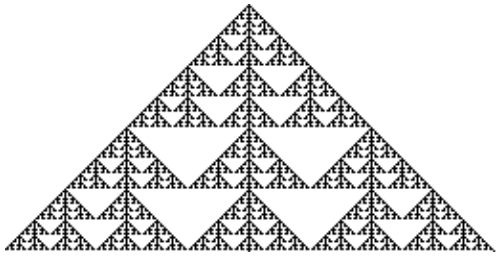

図 5: 切断面 1

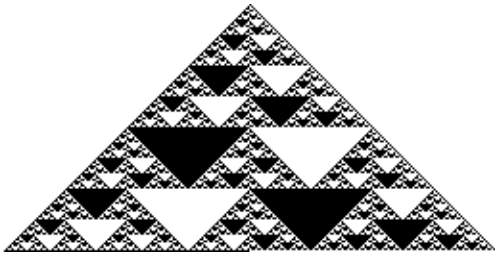

図 6: 切断面 2

参考文献

[1] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:309–319, 1965.

[2] Michele D'amico, Giovanni Manzini, and Luciano Margara. On computing the entropy of cellular automata. *Theoret. Comput. Sci.*, 290(3):1629–1646, 2003.

[3] Akane Kawaharada. Estimating topological entropy of a two-dimensional cellular automaton and considering the stability of periodic points. *Master's Thesis of Hokkaido University*, 2010. `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~aka/syuron2.pdf`.

[4] E. L. Lakshtanov and E. S. Langvagen. A criterion for the infinity of the topological entropy of multidimensional cellular automata. *Problemy Peredachi Informatsii*, 40(2):70–72, 2004.

[5] Tom Meyerovitch. Finite entropy for multidimensional cellular automata. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(4):1243–1260, 2008.

[6] G. Morris and T. Ward. Entropy bounds for endomorphisms commuting with K actions. *Israel J. Math.*, 106:1–11, 1998.