

# 空間グラフのトポロジー ～ 外在的性質と内在的性質

新國 亮 (東京女子大学現代教養学部)\*

## 概 要

空間グラフの理論とは, 3次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  において, 幾つかの点を紐で繋いでできる図形を数学的に研究する分野である. 対象が結び目・絡み目の直接の拡張であることから, 主に低次元トポロジー, 結び目理論の立場から研究される. 結び目理論の立場からは, 空間グラフの  $\mathbb{R}^3$  における位置の分類, 即ち外在的性質の研究が中心である. 一方, グラフが十分「大きい」ならば, その任意の空間グラフはある特有の性質を持ち, それをグラフ理論の立場から特徴付けようという研究も行われていて, これはいわば空間グラフの内在的性質の研究である. 本講演では, この Summer School の趣旨に(できるだけ)沿い, 空間グラフの外在的/内在的性質のそれぞれについて, 研究の動機付けとなる古典的結果を題材に, これから研究を始めるにあたり理解しておくことの良い(と思われる)事柄の入門的な解説を試みる.

## 目 次

1. 空間グラフの理論	1
1.1. 空間グラフ, 正則図式	1
1.2. 空間グラフに現れる独特の現象	6
2. 空間グラフの Alexander 不変量	8
2.1. 空間グラフ群	8
2.2. Alexander 不変量	10
2.3. ハンドル体結び目	12
2.4. ねじれ Alexander 不変量	14
3. Conway-Gordon の定理	15
3.1. Conway-Gordon の定理	15
3.2. 結び目内在性/絡み目内在性とグラフマイナー	16
3.3. Conway-Gordon の定理の精密化と一般化	18

## 1. 空間グラフの理論

### 1.1. 空間グラフ, 正則図式

まず研究対象を定義しよう. いわゆるグラフ理論におけるグラフとは, 集合  $V, E$  及び接続関数と呼ばれる  $E$  から  $V$  の元の非順序対の集合への写像  $\psi$  からなる 3 対  $G = (V, E, \psi)$  のことである. 本稿では  $V, E$  はともに空でない有限集合と仮定する.  $V$  の元を  $G$  の頂点,  $E$  の元を  $G$  の辺という.  $\psi(e) = (u, v)$  のとき, 頂点  $u, v$  をそれぞれ辺  $e$  の端点といい, 特に  $u = v$  のとき,  $e$  をループと呼ぶ. 頂点  $v$  に対し,  $v$  を端点に持つループでない辺の本数と,  $v$  を端点に持つループの本数  $\times 2$  の和を  $v$  の次数という. 例えば 図 1.1.1 (1) は

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

$$\psi(e_1) = (v_1, v_1), \quad \psi(e_2) = (v_2, v_1), \quad \psi(e_3) = (v_1, v_3), \quad \psi(e_4) = (v_3, v_2), \quad \psi(e_5) = (v_3, v_2)$$

\* 東京都杉並区善福寺 2-6-1 東京女子大学現代教養学部数理科学科  
e-mail: nick@lab.twcu.ac.jp

で定義されたグラフ  $G = (V, E, \psi)$  を「図解」したものである. すると各頂点の次数は, その頂点から局所的に伸びる辺弧の本数として理解できる. グラフ  $G' = (V', E', \psi')$  が  $G$  の部分グラフであるとは,  $V', E'$  がそれぞれ  $V, E$  の部分集合で, かつ  $\psi'$  が  $\psi$  の  $E'$  への制限となっているときをいう (例えば図 1.1.1 (2) の太線部分).

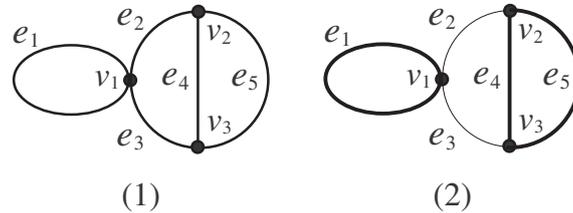


図 1.1.1: (1) グラフ  $G$ , (2)  $G$  の部分グラフ  $G'$

このグラフ  $G$  を, 各辺  $e$  を線分と考え接続関数に沿って各頂点に接着することで, 自然にコンパクトな位相空間とみなす.<sup>1</sup> このとき,  $G$  の部分グラフは  $G$  の部分位相空間である. 任意のグラフ  $G$  に対し, その3次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  (または3次元球面  $S^3$ ) への埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  が存在する. この  $f$  を  $G$  の空間埋め込みといい, その像  $f(G)$  を  $G$  の空間グラフという. 特に  $G$  自身が円周/円周の  $m$  個の非交和と同相であるとき,  $f(G)$  は結び目/ $m$ 成分絡み目にほかならない. 一般に,  $G$  の部分グラフで円周に同相なものをサイクルといい,  $G$  の空間埋め込み  $f$  及びサイクル/サイクルの非交和  $\lambda$  に対し,  $f(\lambda)$  は  $f(G)$  内の結び目/絡み目である. これを空間グラフの結び目成分/絡み目成分という. 例えば, 図 1.1.2 は図 1.1.1 の  $G$  の空間グラフであり, 図 1.1.1 (2) の部分グラフ  $G'$  は2つのサイクルの非交和で,  $f(G')$  は  $f(G)$  の2成分の絡み目成分である.

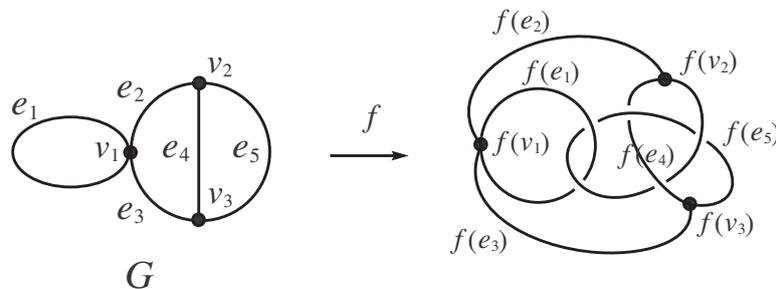


図 1.1.2:  $G$  の空間グラフ  $f(G)$

空間グラフという対象は結び目の直接の拡張であり, 結び目理論において考えられている概念の多くもまた空間グラフに拡張される. まず, グラフ  $G$  の2つの空間グラフ  $f(G)$  と  $g(G)$  が互いに同値であるとは,  $\mathbb{R}^3$  の自己同相写像  $\Phi$  が存在して  $\Phi(f(G)) = g(G)$  となるときをいい, 特に  $\Phi$  が  $\mathbb{R}^3$  の向きを保存するとき, 互いに同型であるといって  $f(G) \cong g(G)$  で表す. 例えば, 図 1.1.3 の空間グラフ  $f(G)$  と  $g(G)$  は互いに同型である. より強く, グラフ  $G$  の2つの空間埋め込み  $f, g$  が互いにアンビエント・イソトピック

<sup>1</sup> トポロジーの用語に親しみがあるなら, 1次元有限 CW 複体の多面体をグラフとすればよい. その場合は0胞体が頂点, 1胞体が辺である. また, 部分複体が部分グラフである.

クであるとは、 $\mathbb{R}^3$  の向きを保存する自己同相写像  $\Phi$  が存在して  $\Phi \circ f = g$  となるときをいい、このとき  $f \cong g$  で表す。グラフ  $G$  が平面的であるとは、 $G$  の  $\mathbb{R}^2$  への埋め込みが存在するときをいい、平面的グラフ  $G$  の空間グラフ  $f(G)$  が自明であるとは、 $f(G)$  が  $\mathbb{R}^3$  内の平面に含まれるある空間グラフ  $h(G)$  に同型であるときをいう。<sup>2</sup> 自明でない空間グラフは非自明であるという。例えば、図 1.1.4 の  $f(G)$  は自明な空間グラフである。一方、図 1.1.2 の空間グラフは、結び目成分  $f(e_4 \cup e_5)$  が非自明な結び目であることから、非自明な空間グラフである。

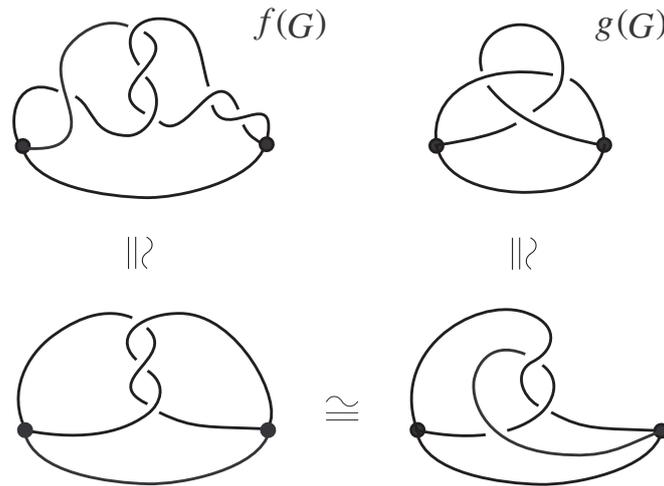


図 1.1.3: 互いに同型な空間グラフ  $f(G)$  と  $g(G)$

結び目理論と同様に、空間グラフの同型類の分類は、基本的な問題かつ大きな目標である。これは空間グラフの  $\mathbb{R}^3$  や  $\mathbb{S}^3$  における位置の分類であるから、空間グラフの外在的性質の研究といえる。同型であることを示すには、図 1.1.3 のように実際に変形してみせれば良い。一方、同型でないことを示すには、空間グラフの同型類全体の集合から、ある集合への写像を考えると良い。これを空間グラフの不変量という。与えられた不変量において、異なる不変量値を持つ 2 つの空間グラフは互いに同型でない。不変量を調べるために、空間グラフの「絵」を平面上にうまく描き、それを組合せ的に研究するのも結び目の場合と同様である。いま、空間グラフ  $f(G)$  を同型の範囲で適当に変形して、射影  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$  に対し、 $\pi \circ f(G)$  の多重点が辺の間の有限個の横断的 2 重点  $\times$  のみであるようにできる。そこで各 2 重点に  $\pi$  による上下の情報を入れて  $\times$  で表したものを  $f(G)$  の正則図式、あるいは単に図式といい、これら上下の情報付きの 2 重点を交差点という。本稿で登場する空間グラフの「絵」は、全て空間グラフの図式である。このとき、結び目/絡み目に関する Reidemeister の定理の拡張として、次の定理が成り立つ。

**定理 1.1.** ([27], [66]) 2 つの空間グラフ  $f(G)$ ,  $g(G)$  が互いに同型であるための必要十分条件は、それらの図式が、図 1.1.5 の I, II, III, IV, V の変形を有限回用いて互いに移

<sup>2</sup> 平面的グラフの自明な空間グラフの同型類は唯一つである [34]。一方、よく知られているように、非平面的 (= 平面的でない) グラフが存在するので (例えば図 1.1.7 の  $K_5$ ,  $K_{3,3}$ )、全てのグラフが自明な空間グラフを持つわけではない。

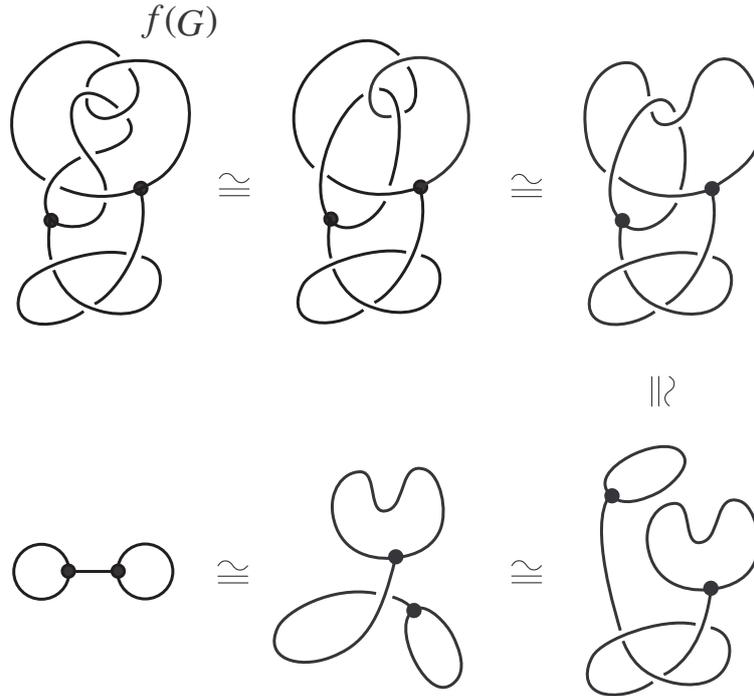


図 1.1.4: 自明な空間グラフ  $f(G)$

り合うことである。<sup>3</sup>

特に I, II, III は結び目/絡み目の **Reidemeister** 変形として良く知られている. 新たに加わった IV, V も Reidemeister 変形と呼ぶ. 定理 1.1 から, 空間グラフの不変量を得るには, これら 5 種類の変形で不変であるような量を探せばよい.

**例 1.2.** 2成分有向絡み目 (各成分に向きの入った絡み目)  $L = J \cup K$  に対し,  $L$  の図式において  $J$  と  $K$  が成す交差点の符号の総和  $\times(1/2)$  を  $L$  の絡み数といい,  $\text{lk}(L)$  または  $\text{lk}(J, K)$  で表す. ここで交差点の符号は,  については  $+1$ ,  については  $-1$  と定義する. これは  $L$  のアンビエント・イソトピー不変量となり, その絶対値は同型に関する不変量となることが, Reidemeister 変形 I, II, III で不変であることからわかる. 例えば図 1.1.6 の絡み目  $L_1, L_2, L_3$  について, これらの絡み数はそれぞれ  $1, -2, 0$  である.

一方, グラフ  $G$  を図 1.1.7 の  $K_5$  (左図),  $K_{3,3}$  (右図) のいずれかとし, その各辺に図 1.1.7 のように名前と向きをつける.  $G$  の互いに交わらない 2 辺の非順序対  $(e, e')$  に対し, そのウェイト  $\varepsilon(e, e')$  を,  $G = K_5$  の場合は  $\varepsilon(e_i, e_j) = 1, \varepsilon(d_i, d_j) = -1, \varepsilon(e_i, d_j) = -1$ , 一方,  $G = K_{3,3}$  の場合は  $\varepsilon(c_i, c_j) = 1, \varepsilon(b_i, b_j) = 1, \varepsilon(c_i, b_j) = 1$  ( $c_i$  と  $b_j$  は図 1.1.7 において向きを込めて平行),  $\varepsilon(c_k, b_l) = -1$  ( $c_k$  と  $b_l$  は図 1.1.7 において逆平行) で定義する. そこで空間グラフ  $f(G)$  の図式において, 互いに交わらない 2 辺の非順序対  $(e, e')$  に対し,  $f(e)$  と  $f(e')$  の間の交差点の符号の総和を  $l(f(e), f(e'))$  で表すとき, 次の整数

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{(e, e')} \varepsilon(e, e') l(f(e), f(e'))$$

<sup>3</sup> より強く, グラフ  $G$  の 2 つの空間埋め込み  $f, g$  が互いにアンビエント・イソトピックであるための必要十分条件は, 空間グラフ  $f(G), g(G)$  の図式が, 図 1.1.5 の I, II, III, IV, V の変形により, 対応する頂点及び辺のラベルを保存して互いに移り合うことである.

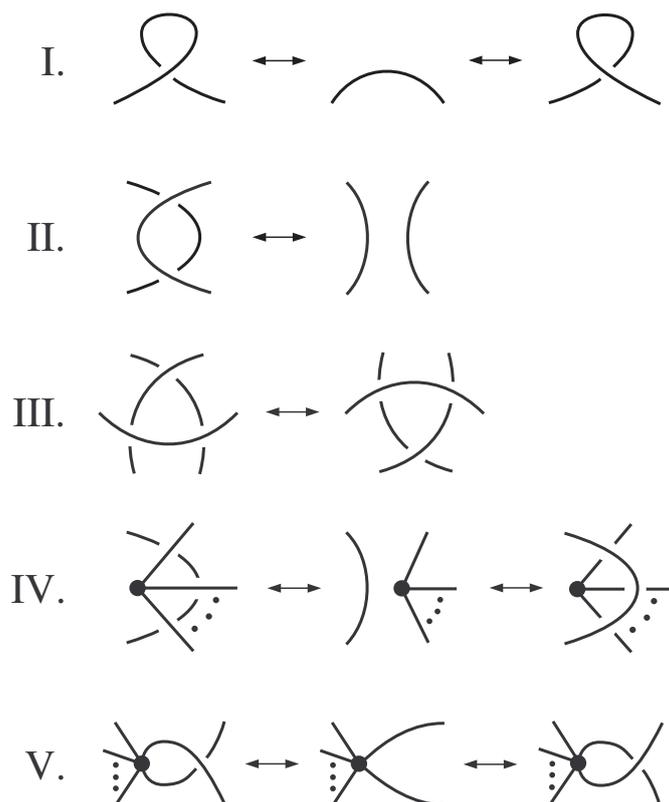


図 1.1.5: Reidemeister 変形

を, 空間埋め込み  $f$  の **Simon 不変量**という [57].<sup>4</sup> これは  $f$  のアンビエント・イソトピー不変量となり, その絶対値は同型に関する不変量となることが, Reidemeister 変形 I, II, III, IV, V で不変であることから確かめられる. 例えば図1.1.8の空間グラフ  $f(K_5)$  (左図),  $f(K_{3,3})$  (右図)について, これらの Simon 不変量はそれぞれ  $-3$ ,  $-9$  である. 実は Simon 不変量は奇数値しか取らない.

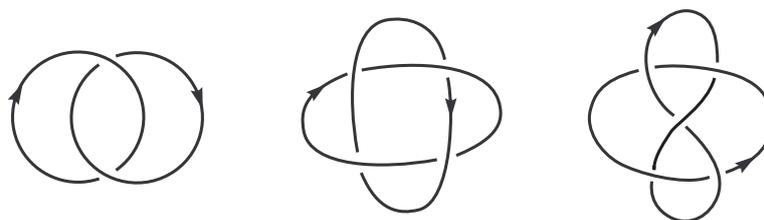


図 1.1.6: 2成分有向絡み目 (左から)  $L_1, L_2, L_3$

結び目/絡み目の図式を通して定義される幾何的な不変量の多くも, 自然に空間グラフに拡張される. 例えば全ての図式の交差点数の最小値として, 空間グラフの**最小交差数**が定義される. **Rolfesen テーブル** [51] のような, 比較的低い最小交差数を持つ結び

<sup>4</sup>  $K_5, K_{3,3}$  とは限らないグラフ  $G$  の空間埋め込み  $f$  についても, その **Wu 不変量**  $\mathcal{L}(f)$  が  $G$  の2点配置空間  $C_2(G) = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in G, x_1 \neq x_2\}$  のある種の同変コホモロジー類として定義され [64], [59], Simon 不変量や絡み数はその特別な場合である.

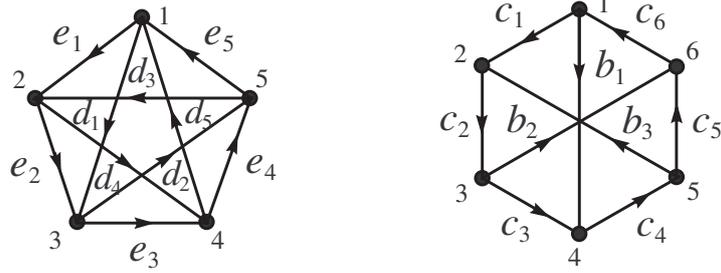


図 1.1.7:  $K_5$  (左図),  $K_{3,3}$  (右図)

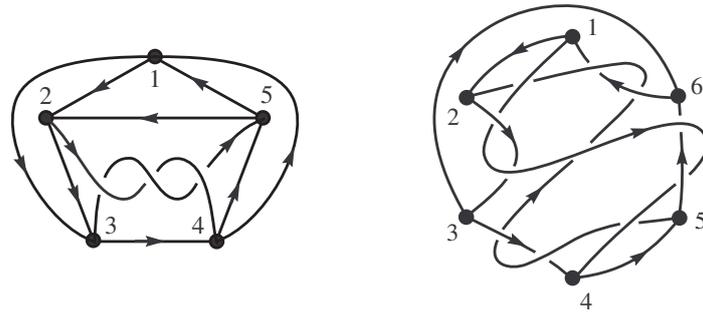


図 1.1.8: 空間グラフ  $f(K_5)$  (左図),  $f(K_{3,3})$  (右図)

目/絡み目の同値類のテーブルはよく知られているが, 空間グラフについても, 例えば図 1.1.3, 図 1.1.4 のグラフ  $G$  について, その空間グラフの同値類のテーブルが作成されている [36], [37]. また, 空間グラフの橋指数 [13], [38], [61], ブレイド (組み紐) 指数 [54], [26] も研究されている.

## 1.2. 空間グラフに現れる独特の現象

§1.1 で述べた通り, 空間グラフの研究の基本的問題は, その同型類の完全分類である. 応用として, 例えば 3 次元球面内の閉曲面やハンドル体など, 結び目とは限らない種々の対象の位置の問題が空間グラフの分類に帰着されるし, また, 分子トポロジーと呼ばれる高分子化学のトポロジー的研究の基礎付けという側面も持つ. 一方で, 筆者の主観に依るが, 結び目理論には現れない特有の性質を空間グラフが持つことも研究の大きな動機となっている. 以下で, そのような性質を 2 つ紹介しよう.

- 非自明な空間グラフで, その結び目成分, 及び絡み目成分が全て自明であるようなものが存在する.
- どのように  $\mathbb{R}^3$  に埋め込んでも, その空間グラフが必ず非自明絡み目や非自明結び目を含むようなグラフが存在する.

まず 1 つ目の性質について述べる. 例えば図 1.2.9 の上段の空間グラフは樹下の  $\theta$  曲線と呼ばれ, 非自明な空間グラフの例であるが, 空間真部分グラフはちょうど 3 つの結び目で, 全て自明である. 即ち, 空間グラフの  $\mathbb{R}^3$  における位置は結び目成分や絡み目

成分に依らない. 一般には次の定理が知られている.

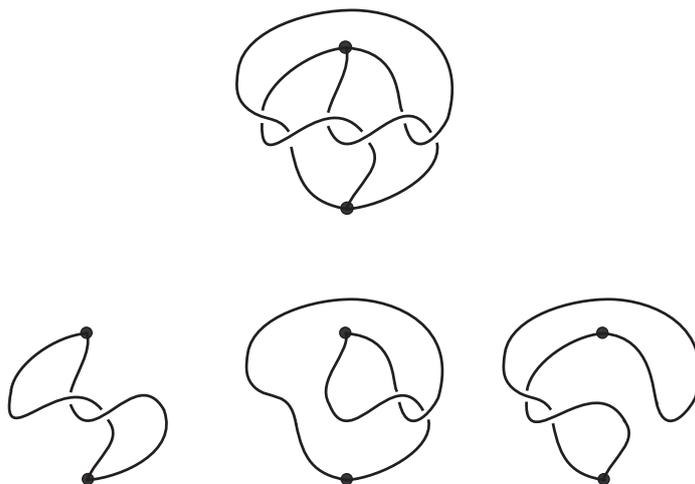


図 1.2.9: 樹下の  $\theta$  曲線 (上段) と, その 3 つの結び目成分

**定理 1.3.** ([28], [63]) 次数 1 以下の頂点を持たない平面的グラフ  $G$  の非自明な空間グラフ  $f(G)$  で,  $G$  の全ての真部分グラフ  $G'$  において  $f(G')$  が自明であるようなものが存在する. このとき, 空間グラフ  $f(G)$  は極小非自明であるという.<sup>5</sup>

そのような空間グラフ独特の絡まり方/結び方方を捉えるには, やはり不変量の研究が重要であるが, 図式を通して定義される幾何的な不変量の場合と異なり, 結び目/絡み目の代数的な不変量が空間グラフに直接拡張されることは稀である. それは対象が 1 次元閉多様体であることを本質的に用いているからである. そんな中, 空間グラフの補空間の基本群, 及びそれから導き出される Alexander 不変量は, 結び目/絡み目から空間グラフに直接拡張され, しかも空間グラフ独特の結び方方/絡まり方を抽出してくれる, 空間グラフの研究に欠かせない不変量である. §2 において, この空間グラフの Alexander 不変量について概説する.<sup>6</sup>

次に 2 つ目の性質について述べる. いま, 任意の異なる 2 頂点をちょうど 1 本の辺で結んでできるグラフを完全グラフといい, 頂点数  $n$  のものを  $K_n$  で表す (図 1.2.10 参照.  $K_5$  は例 1.2 で既に登場したもの). このとき, 特に  $n = 6, 7$  の場合において, 次の有名な事実が知られている.

**定理 1.4.** (1) ([52], [3])  $K_6$  の任意の空間グラフ  $f(K_6)$  は, 必ず非分離<sup>7</sup>な 2 成分絡み目を含む.

(2) ([3])  $K_7$  の任意の空間グラフ  $f(K_7)$  は, 必ず非自明な結び目を含む.

<sup>5</sup> より一般に, 次数 1 以下の頂点を持たないグラフ  $G$  の任意の空間グラフ  $f(G)$  に対し,  $f(G)$  と同型でないある空間グラフ  $g(G)$  で,  $G$  の全ての真部分グラフ  $G'$  において  $f(G')$  と  $g(G')$  は同型であるようなものが無限個存在することが知られている [28].

<sup>6</sup> その他の空間グラフの強力な不変量としては, 結び目/絡み目の Jones 多項式をもとに定義された山田多項式 [65] や, またそのある意味での一般化である横田多項式 [67] などが知られていて, それら不変量のほうが数理解物というテーマに適合すると思われるが, 今回は全く触れない.

<sup>7</sup> 絡み目  $L$  が分離しているとは,  $\mathbb{R}^3$  のある 3 次元球体  $B$  で,  $L$  の一部の成分を含み, 残りの成分とは共通部分を持たないものが存在するときをいい, そのような  $B$  が存在しないとき非分離であるという.

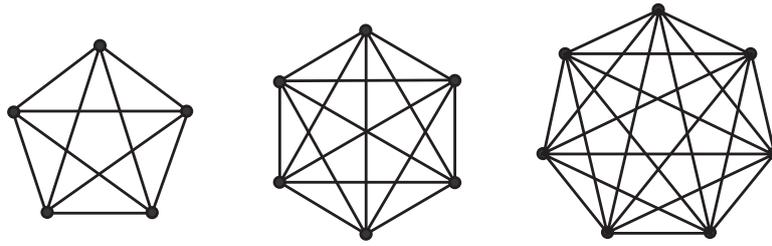


図 1.2.10:  $n$  頂点完全グラフ  $K_n$  ( $n = 5, 6, 7$ )

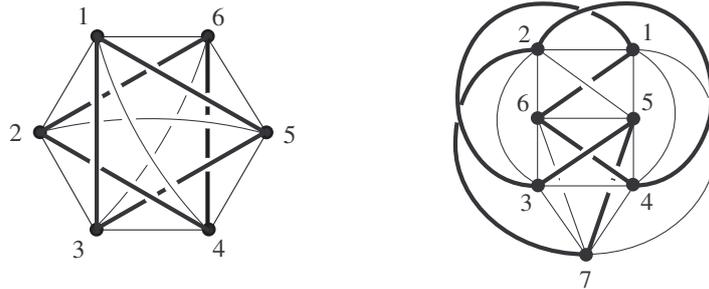


図 1.2.11:  $K_6, K_7$  の空間グラフ. 太線部は左が Hopf 絡み目, 右が三葉結び目に同値.

即ち,  $\mathbb{R}^3$  にどのように埋め込んでも, 「外せない」絡み目を必ず含むグラフや, 「ほどけない」結び目を必ず含むグラフが存在する (図 1.2.11). 前者/後者の性質を持つグラフは絡み目内在/結び目内在であるという. 一般に, グラフが十分「大きい」ならばその任意の空間グラフはある特有の性質を持ち, それをグラフ自体の構造から特徴付けようという, いわば空間グラフの内在的性質の研究が, 定理 1.4 を嚆矢として 1980 年代中盤以降, 盛んに行われている.<sup>8</sup> 定理 1.4 は, **Conway-Gordon** の定理と呼ばれる有名な定理の系として得られ,<sup>9</sup> これは一般に空間グラフの各結び目/絡み目成分たちの振る舞いが独立でなく, 不変量のレベルで互いに干渉し合うことを主張するものである. §3 において, この Conway-Gordon の定理とその周辺の最近の研究について概説する.

## 2. 空間グラフの Alexander 不変量

### 2.1. 空間グラフ群

空間グラフ  $f(G)$  の  $\mathbb{R}^3$  における補空間の基本群  $\mathcal{G}(f(G)) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - f(G))$  を,  $f(G)$  の空間グラフ群という. 特に  $f(G)$  が結び目/絡み目のときは結び目群と呼ばれ, 素な結び目を完全に分類するなど [15], 強力な不変量としてよく研究されている. 結び目群の場合と同様に, 空間グラフ群  $\mathcal{G}(f(G))$  についても,  $f(G)$  の図式から有限個の生成元と関係子からなる群の表示を読みとることができる. まず,  $f(G)$  の図式において, 各辺に適当に向きを入れ, 交差点または頂点を端点とする各弧に矢印  $x_j$  を図 2.1.1 の左図の要領で割り当てる. これら  $x_j$  が生成元となる. 幾何学的な意味は図 2.1.1 の右図の通り.

<sup>8</sup> 更にその源流は, グラフが平面的であるための必要十分条件が,  $K_5$  または  $K_{3,3}$  に同相な部分グラフを含まないことであるという, **Kuratowski** の定理に見出すことができる [33]

<sup>9</sup> 定理 1.4 を指して Conway-Gordon の定理といわれることも多い. また  $K_6$  に関しては Sachs も独立に示していて [52], Conway-Gordon-Sachs の定理といわれることもある.

次に各交差点及び頂点に対し, 図2.1.2の要領で, それぞれ  $x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1}$ ,  $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_d}$  を関係子として加える. こうして得られた群表示を  $\mathcal{G}(f(G))$  の **Wirtinger 表示** という. 結び目群の場合と同様に, 関係子を任意に1個除いてよく, また,  $\beta_q(G)$  を  $G$  の  $q$  次元 Betti 数とすると,  $\mathcal{G}(f(G))$  は不足度 (= 生成元数 - 関係子数) が  $1 - \beta_0(G) + \beta_1(G)$  の表示を持つ [29].

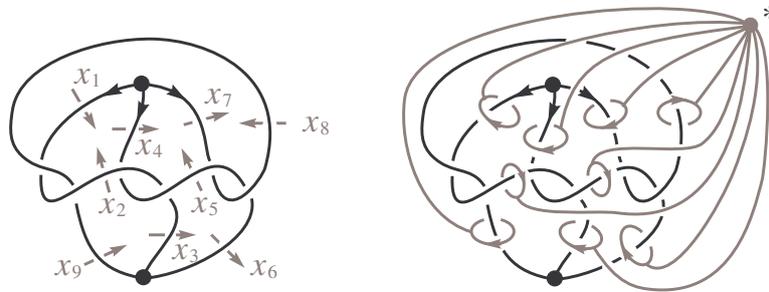


図 2.1.1: 空間グラフ群の生成元

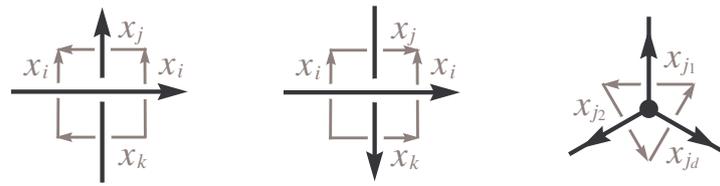


図 2.1.2: 空間グラフ群の関係子

例 2.1. 樹下の  $\theta$  曲線  $f(G)$  について, 図2.1.1から Wirtinger 表示を求めると,

$$\mathcal{G}(f(G)) \cong \left\langle x_1, x_2, \dots, x_9 \mid \begin{array}{l} x_2 x_8 x_1^{-1} x_8^{-1}, x_9 x_2 x_8^{-1} x_2^{-1}, x_5 x_2 x_4^{-1} x_2^{-1}, x_3 x_5 x_2^{-1} x_5^{-1} \\ x_8 x_5 x_7^{-1} x_5^{-1}, x_6 x_8 x_5^{-1} x_8^{-1}, x_1 x_4 x_7, x_3 x_6 x_9 \end{array} \right\rangle$$

である. 関係子から  $x_3 x_6 x_9$  を除いて Tietze 変換を施すと,

$$\mathcal{G}(f(G)) \cong \langle x_2, x_5, x_8 \mid x_8^{-1} x_2 x_8 x_2^{-1} x_5 x_2 x_5^{-1} x_8 x_5 \rangle \quad (1.2.1)$$

となる.

特に  $f(G)$  が結び目/絡み目の場合, 結び目群が自由群であることが自明な結び目/絡み目を特徴付けるのは良く知られている. 一方, 平面的グラフの空間グラフについては, 次の **Scharlemann-Thompson** の定理が成り立つ.

**定理 2.2.** ([53]) 平面的グラフの空間埋め込み  $f$  に対し, 空間グラフ  $f(G)$  が自明であるための必要十分条件は,  $G$  の任意の部分グラフ  $G'$  に対し,  $\mathcal{G}(f(G'))$  が自由群となることである.

しかし, 一般に空間グラフ群の表示だけを見て, それが自由群でないことを判定するのは簡単でない. そこで, 更に空間グラフ群の **Alexander 不変量** を引き出して判定することが行われる.

## 2.2. Alexander 不変量

群  $\mathcal{G}$  及び環  $R$  に対し,  $R\mathcal{G}$  で  $\mathcal{G}$  の  $R$  上の群環を表す. いま, 階数  $s$  の自由群  $F_s = \langle x_1, x_2, \dots, x_s \mid \emptyset \rangle$  に対し, 写像  $\partial/\partial x_j : F_s \rightarrow \mathbb{Z}F_s$  が, 次の性質:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}, \quad \frac{\partial(uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad (u, v \in F_s)$$

をみたすものとして一意に存在する [4]. これを群環の準同型に拡張した写像  $\partial/\partial x_j : \mathbb{Z}F_s \rightarrow \mathbb{Z}F_s$  を,  $x_j$  に関する自由微分という. 有限表示群  $\mathcal{G} = \langle x_1, x_2, \dots, x_s \mid r_1, r_2, \dots, r_t \rangle$  及びアーベル群  $C$  に対し,  $\varphi : F_s \rightarrow \mathcal{G}$  を標準全射,  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow C$  を準同型とし, これらをそれぞれ群環の準同型  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}F_s \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{G}$ ,  $\tilde{\psi} : \mathbb{Z}\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}C$  に拡張しておく. このとき,  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\partial r_i / \partial x_j) \in \mathbb{Z}C$  を  $(i, j)$  成分とする  $\infty$  行  $s$  列の行列  $A(\mathcal{G}, \tilde{\psi})$  を,  $\mathcal{G}$  の  $\psi$  に関する **Alexander 行列** という. 但し第  $(t+1)$  行以降の成分は全て 0 とし, しばしば省略する. 一般に可換環  $\mathbb{Z}C$  に成分を持つそのような  $\infty$  行  $s$  列の行列  $A$  において,  $d \geq 0$  に対し,  $\mathbb{Z}C$  のイデアル  $E_d(A)$  を,  $s-d > t$  のとき  $(0)$ ,  $0 < s-d \leq t$  のとき  $A$  の  $(s-d)$  次小行列式が生成するイデアル,  $s-d \leq 0$  のとき  $(1) = \mathbb{Z}C$  で定める.  $E_d(A)$  を  $A$  の  $d$  番初等イデアルという. そこで  $\mathcal{G}$  の  $\psi$  に関する Alexander 行列  $A(\mathcal{G}, \tilde{\psi})$  の  $d$  番初等イデアルを,  $\mathcal{G}$  の  $\psi$  に関する  $d$  番 **Alexander イデアル** という. 一般に  $E_d(A(\mathcal{G}, \tilde{\psi})) \subset E_{d+1}(A(\mathcal{G}, \tilde{\psi}))$  が成り立ち, Alexander イデアルの列  $\{E_d(A(\mathcal{G}, \tilde{\psi}))\}_{d \geq 0}$  は  $\mathcal{G}$  に施す Tietze 変換で不変である.  $\mathcal{G}$  の表示の不足度  $s-t$  が正ならば

$$E_d(A(\mathcal{G}, \tilde{\psi})) = \begin{cases} (0) & (0 \leq d < s-t) \\ (A(\mathcal{G}, \tilde{\psi}) \text{ の } (s-d) \text{ 次小行列式全体}) & (s-t \leq d < s) \\ (1) & (d \geq s) \end{cases}$$

となり, 特に階数  $s$  の自由群  $F_s$  については, 準同型  $\psi$  に依らず

$$E_d(A(F_s, \tilde{\psi})) = \begin{cases} (0) & (0 \leq d < s) \\ (1) & (d \geq s) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

である. 従って, 適当な  $\psi$  について  $d$  番 Alexander イデアルの列が (2.2.2) と異なれば,  $\mathcal{G}$  は自由群でないことがわかり, 更に全ての準同型  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow C$  に関する Alexander イデアルの列  $\{E_d(A(\mathcal{G}, \tilde{\psi}))\}_{d \geq 0}$  の族は,  $\mathcal{G}$  の同型類の不変量である [29].

そこで, 上で述べたことを空間グラフ群に適用しよう. 空間グラフ群  $\mathcal{G}(f(G))$  の有限表示  $\langle x_1, x_2, \dots, x_s \mid r_1, r_2, \dots, r_t \rangle$  及びアーベル群  $C$  に対し, 準同型  $\psi : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow C$  に関する  $d$  番 Alexander イデアルを, 空間グラフ  $f(G)$  の  $d$  番 **Alexander イデアル** という. 全ての準同型  $\psi : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow C$  に関する Alexander イデアルの列  $\{E_d(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi}))\}_{d \geq 0}$  の族は,  $f(G)$  の同値類の不変量である. これを空間グラフの **Alexander 不変量** とも呼ぶ. 特に  $\beta_1(G) = s$  なる自明な空間グラフ  $f(G)$  は, 任意の準同型  $\psi$  について (2.2.2) を Alexander イデアルの列の族として持つので, 適当な  $\psi$ ,  $d$  について  $E_d(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi})) \neq (0)$ ,  $(1)$  なら,  $\mathcal{G}(f(G))$  は自由群でなく, 従って定理 2.2 から  $f(G)$  は自明でない.

空間グラフの Alexander 不変量は, 結び目/絡み目の **Alexander 多項式** と呼ばれる

有名な不変量の直接の拡張である。<sup>10</sup> 結び目/絡み目の場合にきれいな多項式不変量が定まるのには、結び目群の標準的なアーベル化写像が取れることと、結び目群が不足度1の有限表示を持つことが本質的に効いている。一方、一般の空間グラフの場合、空間グラフ群のアーベル化写像の取り方に自由度が増すことと、空間グラフ群の不足度が1とは限らないこと(既に述べたように、一般に  $1 - \beta_0(G) + \beta_1(G)$  である)から、より緻密な設定が必要となる。例えば、 $C = \langle t \mid \emptyset \rangle$  の場合は、次の命題が成り立つ。

**命題 2.3.** 任意の準同型  $\psi : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$  に対し、 $f(G)$  のある1次元ホモロジー類  $l \in H_1(f(G); \mathbb{Z})$  が存在して、任意の  $g \in \mathcal{G}(f(G))$  に対し  $\psi(g) = t^{\text{lk}(\alpha(g), l)}$  となる。ここで  $\alpha$  は  $\mathcal{G}(f(G))$  のアーベル化写像である。

従って、全ての  $l \in H_1(f(G); \mathbb{Z})$  に対し、準同型  $\psi_l : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$ ,  $g \mapsto t^{\text{lk}(\alpha(g), l)}$  を考えれば、全ての準同型  $\psi : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$  を集めたことになる。

**例 2.4.** 樹下の  $\theta$  曲線  $f(G)$  について、図 2.2.3 のように  $x_1, x_2, x_3$  を取り、また  $r = x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3x_2$  とおけば、 $f(G)$  の空間グラフ群  $\mathcal{G}(f(G))$  は表示  $\langle x_1, x_2, x_3 \mid r \rangle$  を持つ(例 2.1)。いま  $G$  の各辺を図 2.2.3 のように  $e_1, e_2, e_3$  とするとき、 $l_1 = e_1 - e_3$ ,  $l_2 = e_2 - e_3$  とおけば、 $H_1(f(G); \mathbb{Z})$  の任意の元  $l$  は  $l = c_1l_1 + c_2l_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ ) と表される。このとき準同型  $\psi = \psi_l$  による各生成元の行き先は

$$\begin{aligned}\psi(x_1) &= t^{\text{lk}(x_1, c_1l_1 + c_2l_2)} = t^{c_1\text{lk}(x_1, l_1) + c_2\text{lk}(x_1, l_2)} = t^{c_1}, \\ \psi(x_2) &= t^{\text{lk}(x_2, c_1l_1 + c_2l_2)} = t^{c_1\text{lk}(x_2, l_1) + c_2\text{lk}(x_2, l_2)} = t^{c_2}, \\ \psi(x_3) &= t^{\text{lk}(x_3, c_1l_1 + c_2l_2)} = t^{c_1\text{lk}(x_3, l_1) + c_2\text{lk}(x_3, l_2)} = t^{-c_1 - c_2}\end{aligned}$$

となる。そこで  $\psi$  に関する  $\mathcal{G}(f(G))$  の Alexander 行列の各成分を求めると、

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) &= \tilde{\psi}(x_3^{-1} - x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1} + x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_2) = t^{c_1 + c_2} - 1 + t^{c_2}, \\ \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) &= \tilde{\psi}(x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1} - x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} + x_2^{-1}) = 1 - t^{c_1} + t^{-c_2}, \\ \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x_3} \right) &= \tilde{\psi}(-x_3^{-1} - x_3^{-1}x_1 + x_2^{-1}x_3^{-1}) = -t^{c_1 + c_2} + t^{2c_1 + c_2} + t^{c_1}\end{aligned}$$

であるから、

$$A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi}) = \begin{pmatrix} t^{c_1 + c_2} - 1 + t^{c_2} & 1 - t^{c_1} + t^{-c_2} & -t^{c_1 + c_2} + t^{2c_1 + c_2} + t^{c_1} \end{pmatrix}$$

<sup>10</sup>特に  $f(G)$  が結び目/絡み目  $L$  のとき、準同型  $\psi : \mathcal{G}(L) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$ ,  $x_j \mapsto t$  に関する1番 Alexander イデアルは必ず  $\mathbb{Z}\langle t \mid \emptyset \rangle = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  の単項イデアルとなり、その生成元  $\Delta_L(t)$  を  $L$  の **Alexander 多項式** という。これは  $\pm t^k$  倍を無視して  $L$  の同値類に関する不変量となる。また、 $f(G)$  が  $m (\geq 2)$  成分絡み目  $L$  のとき、標準的なアーベル化写像

$$\psi : \mathcal{G}(L) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3 - L) \cong \langle t_1, t_2, \dots, t_m \mid [t_i, t_j] \ (1 \leq i < j \leq m) \rangle$$

に関する1番 Alexander イデアルは、ある多項式  $\Delta_L(t_1, t_2, \dots, t_m)$  によって

$$\Delta_L(t_1, t_2, \dots, t_m)(1 - t_1, 1 - t_2, \dots, 1 - t_m)$$

とかける。この  $\Delta_L(t_1, t_2, \dots, t_m)$  を  $L$  の多変数 **Alexander 多項式** という。これは  $\pm t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_m^{k_m}$  倍を無視して  $L$  の同値類に関する不変量となる。

となる. そこで特に2番 Alexander イデアルは

$$\begin{aligned} E_2(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi})) &= (t^{c_1+c_2} - 1 + t^{c_2}, 1 - t^{c_1} + t^{-c_2}, -t^{c_1+c_2} + t^{2c_1+c_2} + t^{c_1}) \\ &= (t^{c_1+c_2} - 1 + t^{c_2}, t^{c_2} - t^{c_1+c_2} + 1, -t^{c_2} + t^{c_1+c_2} + 1) \\ &= (2, 1 - t^{c_2} + t^{c_1+c_2}) \end{aligned}$$

となる. 例えば  $c_1 = c_2 = 1$  の場合, イデアル  $(2, 1 - t + t^2)$  は非単項イデアルで (0) でも (1) でもない. 従って, 樹下の  $\theta$  曲線は非自明である.

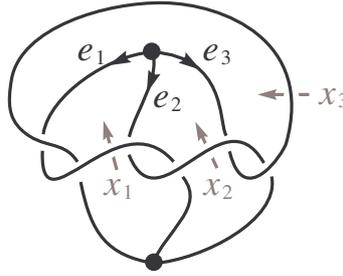


図 2.2.3: 樹下の  $\theta$  曲線と, その空間グラフ群の生成元

**例 2.5.** 図 2.2.4 の左図の空間手錠グラフ  $f(G)$  を考えよう. 含まれる 2 つの結び目, 及び 1 つの 2 成分絡み目はいずれも自明である. これについて, 図 2.2.4 のように  $x, y, z$  を取り, また  $r = zyxzx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}$  とおけば,  $f(G)$  の空間グラフ群  $\mathcal{G}(f(G))$  は表示  $\langle x, y, z \mid r \rangle$  を持つ. いま  $G$  の各辺を図 2.2.3 のように  $e_1, e_2, e_3$  とするとき,  $H_1(f(G); \mathbb{Z})$  の任意の元  $l$  は  $l = c_1e_1 + c_2e_2$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ ) と表され, 準同型  $\psi = \psi_l$  による各生成元の行き先は  $\psi(x) = t^{c_1}$ ,  $\psi(y) = t^{c_2}$ ,  $\psi(z) = 1$  となる. そこで  $\psi$  に関する  $\mathcal{G}(f(G))$  の Alexander 行列は

$$A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - t^{c_1} + t^{c_1+c_2} \end{pmatrix}$$

となり, 特に2番 Alexander イデアルは

$$E_2(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi})) = (1 - t^{c_1} + t^{c_1+c_2})$$

となる. 例えば  $c_1 = c_2 = 1$  の場合, イデアル  $(1 - t + t^2)$  は単項イデアルで (0) でも (1) でもない. 従って, この空間手錠グラフ  $f(G)$  は非自明である.

### 2.3. ハンドル体結び目

3次元球面  $S^3$  内のハンドル体をハンドル体結び目という. ハンドル体結び目  $H_1, H_2$  が同型であるとは,  $S^3$  の向きを保つ自己同相写像  $\Phi$  が存在して  $\Phi(H_1) = H_2$  となることをいい, また, ハンドル体結び目  $H$  が自明であるとは, その  $S^3$  における外部空間が同じ種数のハンドル体となることをいう. 例えば図 2.3.5 の 2 つの種数 2 のハンドル体結び目は, いずれも自明である. 種数  $g$  のハンドル体結び目の同型類は, 1次元 Betti

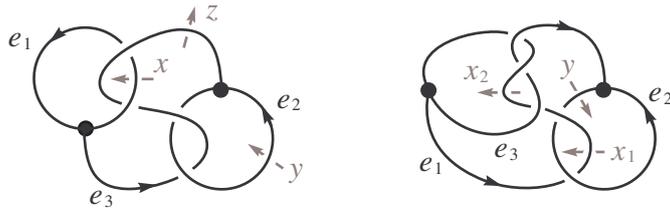


図 2.2.4: 空間手錠グラフ  $f(G), g(G)$

数が  $g$  の連結なグラフの空間グラフの近傍同値類と 1 対 1 に対応する.<sup>11</sup> ここで空間グラフ  $f(G)$  と  $g(G')$  が近傍同値であるとは,  $S^3$  の向きを保つ自己同相写像  $\Phi$  が存在して,  $\Phi$  が  $f(G)$  の  $S^3$  における正則近傍を  $g(G')$  のそれに写すときをいう [56]. 図 2.3.5 の 2 つのハンドル体結び目が同型であることは, 空間グラフ  と  が互いに近傍同値であることを意味する (これらは通常の意味では同型でないことに注意せよ).

ハンドル体結び目  $H$  に対し,  $H$  の  $S^3$  における補空間の基本群を  $H$  のハンドル体結び目群といい,  $\mathcal{G}(H)$  で表す.  $\mathcal{G}(H)$  は  $H$  を  $S^3$  における正則近傍として持つ空間グラフ  $f(G)$  の空間グラフ群と同型で, 従って  $d$  番 Alexander イデアル  $\{E_d(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\psi}))\}_{d \geq 0}$  の族は,  $H$  の同型類の不変量である. これを  $\{E_d(A(\mathcal{G}(H), \tilde{\psi}))\}_{d \geq 0}$  で表す.

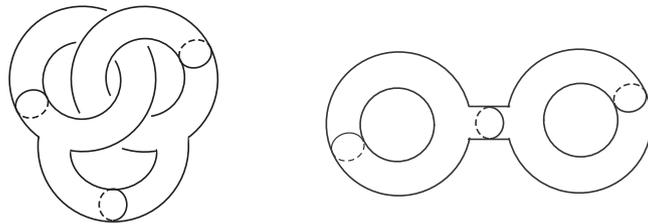
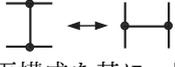


図 2.3.5: 種数 2 の自明なハンドル体結び目

**例 2.6.**  $H_0$  を種数 2 の自明なハンドル体結び目としよう. これは自明な空間グラフ  の近傍同値類に対応し, 既に見たように, その任意の準同型  $\psi: \mathcal{G}(H_0) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$  に関する  $d$  番初等イデアルは  $d \leq 1$  のとき (0),  $d \geq 2$  のとき (1) である. 次に樹下の  $\theta$  曲線の正則近傍として得られるハンドル体結び目を  $H_1$  とし, 図 2.2.4 の左図の空間手錠グラフの正則近傍として得られるハンドル体結び目を  $H_2$  とする. 例 2.4 で見たように,  $H_1$  は適当な準同型  $\psi: \mathcal{G}(H_1) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$  に関して非単項な 2 番初等イデアルを持つので, ハンドル体結び目として自明でない. 一方, 例 2.5 で見たように,  $H_2$  は適当な準同型  $\psi: \mathcal{G}(H_2) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$  に関してその 2 番初等イデアルは (1) でないので, ハンドル体結び目として自明でなく, 更に任意の準同型  $\psi$  に関してその 2 番初等イデアルは単項イデアルなので,  $H_1$  と  $H_2$  はハンドル体結び目として同型でない.

<sup>11</sup> 全ての頂点の次数が 3 であるグラフを 3 価グラフといい, ハンドル体結び目の同型類と, 空間 3 価グラフの図式を Reidemeister 変形及び IH 変形  で割った剰余類がやはり 1 対 1 に対応することが知られている [23]. この組合せ的再構成を基に, カンドルと呼ばれる代数を用いたハンドル体結び目の不変量の研究が活発に成されている. 詳細は [24] を参照.

## 2.4. ねじれ Alexander 不変量

結び目/絡み目の Alexander 多項式については, 更に結び目群の線型表現を經由してねじれ Alexander 多項式が定義される. §2.2 で述べた通常の Alexander 不変量と同様に, 有限表示群に対し純代数的に定義される和田の方法 [62] を採用することで, 空間グラフ群にも然るべく応用が可能となる. 以下, それについて述べよう.  $R$  を乗法単位元を持つ可換環とし,  $\rho : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow GL(n; R)$  を空間グラフ群の表現とする. これは群環の準同型  $\tilde{\rho} : \mathbb{Z}\mathcal{G}(f(G)) \rightarrow M_n(R)$  に拡張される. このとき, 準同型  $\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi} : \mathbb{Z}\mathcal{G}(f(G)) \rightarrow M_n(RC)$  を

$$\sum_i m_i g_i \mapsto \sum_i m_i \psi(g_i) \rho(g_i) \quad (m_i \in \mathbb{Z}, g_i \in \mathcal{G}(f(G)))$$

で定義し,  $\tilde{\rho}$  と  $\tilde{\psi}$  のテンソル積準同型という. このとき,  $(\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \circ \tilde{\varphi}(\partial r_i / \partial x_j) \in M_n(RC)$  を  $(i, j)$  成分とする  $\infty$  行  $s$  列の行列  $A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi})$  を,  $\mathcal{G}(f(G))$  の  $\rho, \psi$  に関するねじれ Alexander 行列という. これは  $\mathbb{Z}C$  に成分を持つ  $n$  次正方行列を各成分とする行列である. 但し第  $(t+1)$  行以降の成分は全て零行列とし, しばしば省略する. そこで  $A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi})$  を自然に  $\infty$  行  $ns$  列の行列とみなし (第  $(nt+1)$  行以降の成分は全て 0), その  $d$  番初等イデアル  $E_d(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}))$  を,  $\mathcal{G}(f(G))$  の  $\rho, \psi$  に関する  $d$  番ねじれ Alexander イデアルという. 即ち

$$E_d(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi})) = \begin{cases} (0) & (0 \leq d < ns - nt) \\ \left( \begin{array}{l} A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \text{ の} \\ (ns - d) \text{ 次小行列式全体} \end{array} \right) & (ns - nt \leq d < ns) \\ (1) & (d \geq ns) \end{cases}$$

である. 全ての準同型  $\psi : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow C$ , 及び全ての表現  $\rho : \mathcal{G}(f(G)) \rightarrow GL(n; R)$  に関するねじれ Alexander イデアルの列  $\{E_d(A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}))\}_{d \geq 0}$  の族は,  $f(G)$  の同値類の不変量である [25].<sup>12</sup>

**例 2.7.** 図 2.2.4 の右図の空間手錠グラフ  $g(G)$  が表すハンドル体結び目  $H_3$  を考えよう. 図 2.2.4 のように  $x_1, x_2, y$  を取り, また  $r = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y x_1^{-1} y^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} y x_1 y^{-1}$  とおけば,  $g(G)$  のハンドル体結び目群  $\mathcal{G}(H_3)$  は表示  $\langle x_1, x_2, y \mid r \rangle$  を持つ. このとき, 任意の準同型  $\psi : \mathcal{G}(H_3) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$  に関して,  $A(\mathcal{G}(H_3), \tilde{\psi})$  の  $d$  番 Alexander イデアル  $E_d(A(\mathcal{G}(H_3), \tilde{\psi}))$  は,  $d \leq 1$  のとき (0),  $d \geq 2$  のとき (1) となり, 自明なハンドル体結び目  $H_0$  と同じ Alexander イデアルを持つ. 従って, 例 2.6 の  $H_1, H_2$  とは同型でない. 一方, 今度は準同型  $\psi : \mathcal{G}(H_3) \rightarrow \langle t \mid t^2 \rangle$  を  $x_1, x_2, y \mapsto t$  で定義し, また, 表現

<sup>12</sup>特に  $f(G)$  が結び目  $K$  のとき, 準同型  $\psi : \mathcal{G}(K) \rightarrow \langle t \mid \emptyset \rangle$ ,  $x_j \mapsto t$  及び表現  $\rho : \mathcal{G}(L) \rightarrow GL(n; R)$  に対し, 任意の  $x_j$  について  $(\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \circ \tilde{\varphi}(x_j - 1) \neq 0$  となり,  $A(\mathcal{G}(f(G)), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi})$  の  $M_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$  に成分を持つ行列としての“第  $j$  行”を除いた小行列式を  $D_j$  とおくと,

$$\Delta_{K, \rho}(t) = \frac{D_j}{(\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \circ \tilde{\varphi}(x_j - 1)}$$

を  $K$  の  $\rho, \psi$  に関するねじれ Alexander 多項式という. これは  $\pm t^k$  倍を無視して  $K$  の同値類と表現  $\rho$  の組  $(K, \rho)$  に関する不変量となる. 結び目のねじれ Alexander 多項式についての詳細は, [62] 及び [30] を参照.

$\rho : \mathcal{G}(H_3) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}_2)$  を

$$x_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, x_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき,  $\mathcal{G}(H_3)$  の  $\rho, \psi$  に関するねじれ Alexander 行列は

$$\begin{aligned} A(\mathcal{G}(H_3), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) &= \begin{pmatrix} (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \circ \tilde{\varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x_1} \right) & (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \circ \tilde{\varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) & (\tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}) \circ \tilde{\varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ t & 1+t & 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1+t & t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t & 1+t & 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1+t & t & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, 特に  $\rho, \psi$  に関する 4 番ねじれ Alexander イデアル  $E_4(A(\mathcal{G}(H_3), \tilde{\rho} \otimes \tilde{\psi}))$  は  $(1+t)$  となる. 一方,  $H_0$  については, 任意の準同型  $\psi : \mathcal{G}(H_0) \rightarrow \langle t \mid t^2 \rangle$  及び任意の表現  $\rho : \mathcal{G}(H_3) \rightarrow SL(2; \mathbb{Z}_2)$  に対し, それらに関する 4 番ねじれ Alexander イデアルは (1) である [25]. これより,  $H_3$  はハンドル体結び目として自明でないことがわかる.

空間グラフの Alexander 不変量は, 1970 年代には空間グラフの不変量の主流であったが, 1980 年代中盤以降, 目立った研究が現れなかった. しかし空間グラフの近傍同値分類 = ハンドル体結び目の理論が再び研究者の興味を集めるようになったことに伴い, 改めてその有用性が認識されている. 例えば, 結び目  $J, K$  に対し, 関係  $J \geq K$  を  $J$  の結び目群から  $K$  の結び目群への全射準同型が存在するときと定義すると, この関係は特に素な結び目の同値類全体の集合において半順序となり, (ねじれ) Alexander 多項式を駆使して 11 交点以下の素な結び目についてその半順序が決められているが [31], [20], 種数 2 以上のハンドル体結び目についても同様の研究が開始され [43], そこでは空間グラフの (ねじれ) Alexander 不変量が重要な役割を果たしている.

### 3. Conway-Gordon の定理

#### 3.1. Conway-Gordon の定理

以下, グラフ  $G$  のちょうど  $k$  個の頂点を含むサイクルを  $k$  サイクルと呼び,  $k$  サイクル全体の集合を  $\Gamma_k(G)$  で表す. 特に  $k$  が  $G$  の頂点数に等しいとき,  $k$  サイクルをグラフ理論では **Hamilton サイクル** と呼ぶ. また,  $G$  の  $k$  サイクルと  $l$  サイクルとの非交和全体の集合を  $\Gamma_{k,l}(G)$  で表す.  $G$  の空間グラフ  $f(G)$  において,  $G$  の  $k$  サイクル  $\gamma$  の像  $f(\gamma)$  をしばしば  $k$  サイクル結び目と呼び, 特に  $\gamma$  が Hamilton サイクル のとき, **Hamilton 結び目** と呼ぶことにする.

さて, 6 頂点完全グラフ  $K_6$ , 及び 7 頂点完全グラフ  $K_7$  の空間グラフについて, Conway-Gordon は次を示した. 本稿ではこの事実を **Conway-Gordon の定理** と呼ぶ.

**定理 3.1.** ([3])

- (1)  $K_6$  の任意の空間グラフ  $f(K_6)$  において,  $\sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda)) \equiv 1 \pmod{2}$ . ここで  $\text{lk}$  は例 1.2 で述べた絡み数を表す.
- (2)  $K_7$  の任意の空間グラフ  $f(K_7)$  において,  $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$ . ここで  $a_2$  は Conway 多項式の  $z^2$  の係数を表す.

ここで有向絡み目  $L$  の Conway 多項式とは,  $z$  に関する整係数多項式  $\nabla_L(z)$  で,  $L$  の Alexander 多項式  $\Delta_L(t)$  を適当に正規化し, 変数変換  $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$  を施すと得られるものである. 特に有向結び目  $K$  の Conway 多項式は向きに依らず, また必ず  $1 + \sum_{i \geq 1} a_{2i}(K)z^{2i}$  の形に表され,  $K$  が自明なら  $\nabla_K(z) = 1$  である. 分離絡み目の絡み数, 自明な結び目の  $a_2$  がともに 0 であることから, 定理 1.4 は定理 3.1 の系として直ちに得られる. 即ち, (1) において,  $f(K_6)$  は lk の値が奇数である非分離な 2 成分絡み目を必ず含み, また (2) において,  $f(K_7)$  は  $a_2$  の値が奇数である非自明な Hamilton 結び目を必ず含む.

定理 3.1 のオリジナルの証明は以下のように成された. まず (1) について,  $K_6$  の空間グラフ  $f(K_6)$  に対し,  $\sigma(f) \equiv \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda)) \pmod{2}$  が辺の間の交差交換で不変であることがわかる. 具体的には, 交差交換による各絡み目の lk の総和の変化が偶数であることが確かめられ, 従って  $\sigma(f)$  は埋め込み  $f$  に依らない. 次に具体的に  $\sigma(h) = 1$  となる埋め込み  $h$  を与えることで,  $\sigma(f) = \sigma(h) = 1$  が示される (実際, 図 1.2.11 の  $K_6$  の空間グラフは, 全 10 個の 2 成分の絡み目成分のうち唯 1 つだけ非分離で  $\text{lk} = \pm 1$ ). 次に (2) について,  $K_7$  の空間グラフ  $f(K_7)$  に対し,  $\alpha(f) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \pmod{2}$  が辺の間の交差交換で不変であることを, 次の要領で示す: いま, 交差点  及び  を  に代えることを交差点の平滑化といい, 特に有向結び目上の交差交換と, その平滑化として得られる 2 成分有向絡み目について, 関係式  $a_2(\text{crossing}) - a_2(\text{smoothed crossing}) = \text{lk}(\text{smoothed crossing})$  が成り立つ.<sup>13</sup> このことから, 交差交換による各結び目の  $a_2$  の総和の変化は, その平滑化により生じる 2 成分絡み目の絡み数の総和に等しく, 更にそれが偶数であることが確かめられる. 従って  $\alpha(f)$  は埋め込み  $f$  に依らず, 次に具体的に  $\alpha(h) = 1$  となる埋め込み  $h$  を与えることで,  $\alpha(f) = \alpha(h) = 1$  が示される (実際, 図 1.2.11 の  $K_7$  の空間グラフは, 全 360 個の Hamilton 結び目のうち唯 1 つだけ非自明で  $a_2 = 1$ ).

### 3.2. 結び目内在性/絡み目内在性とグラフマイナー

Conway-Gordon の定理によって, 絡み目内在/結び目内在なグラフが存在することがわかった. これらの性質を持つグラフの分類・特徴付けが次の問題となるが, そこでは以下のように, グラフマイナー理論が用いられる.<sup>14</sup> いま, グラフ  $H$  がグラフ  $G$  のマイナーであるとは,  $H$  が  $G$  から「部分グラフを取る」, 「ループでない辺を縮約する」の 2 つの操作を有限回施して得られるときをいう. これはグラフ全体の集合における半順序を定める.  $\mathcal{P}$  をグラフのある性質とし, 条件「 $\mathcal{P}$  を持たないグラフの任意のマイナーも, やはり  $\mathcal{P}$  を持たない」をみたすとする. 例えばグラフの非平面性や結び目内在性/絡み目内在性は, いずれもこの条件をみたす. グラフ  $G$  において,  $G$  自身は  $\mathcal{P}$  を持つが,  $G$  の任意の真マイナーは  $\mathcal{P}$  を持たないとき,  $G$  は  $\mathcal{P}$  に関してマイナーミニマルであるという. グラフマイナー理論から, マイナーミニマルなグラフは高々有限個しかなく, このとき,  $\mathcal{P}$  を持つグラフは,  $\mathcal{P}$  に関してマイナーミニマルなグラフをマイナーに持つという形で特徴付けられる. 例えば非平面性に関してマイナーミニマルなグラフ

<sup>13</sup> 一般に Conway 多項式は,  $\nabla_{\text{crossing}}(z) - \nabla_{\text{smoothed crossing}}(z) = z \nabla_{\text{smoothed crossing}}(z)$  をみたす (スケイン関係式). また, 2 成分

有向絡み目の Conway 多項式の  $z$  の係数は絡み数に等しいことが知られている. 従って  $a_2(\text{crossing}) - a_2(\text{smoothed crossing}) = \text{lk}(\text{smoothed crossing})$  が得られる.

<sup>14</sup> グラフマイナー理論についての詳細については, 例えば [5, §12] を参照.

は,  $K_5, K_{3,3}$  の2つであり, グラフ  $G$  が非平面的であるための必要十分条件は,  $G$  が  $K_5$  または  $K_{3,3}$  をマイナーに持つことである. そこで, 絡み目内在性/結び目内在性に関してマイナーミニマルなグラフを全てリストアップすることが目標となる.

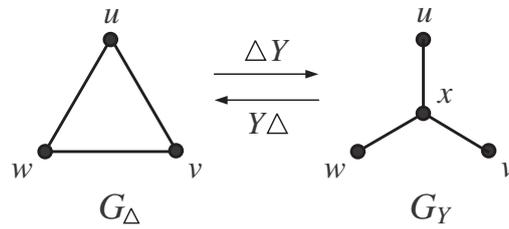


図 3.2.1:  $\Delta Y$  変換,  $Y\Delta$  変換

絡み目内在/結び目内在グラフの大量生産によく用いられるのが, 図 3.2.1 に示した, グラフの  $\Delta Y$  変換である. これは3サイクル  $[uvw]$  の3辺を除き, 代わりに頂点  $x$  及び辺  $xu, xv, xw$  を加えるもので, この逆操作を  $Y\Delta$  変換という. 特に絡み目内在/結び目内在グラフ  $G_\Delta$  から  $\Delta Y$  変換でグラフ  $G_Y$  が得られるとき,  $G_Y$  も絡み目内在/結び目内在であり, 更に  $G_Y$  がそれら性質に関してマイナーミニマルならば,  $G_\Delta$  もそれら性質に関してマイナーミニマルである [48]. このことを踏まえると, 例えば  $K_6$  から有限回の  $\Delta Y$  変換,  $Y\Delta$  変換で得られる図 3.2.2 の7つのグラフが, 全て絡み目内在に関してマイナーミニマルであることを確かめるのは, そう難しいことではない. これら7つのグラフの集合は, Petersen グラフを含んでいることから (下段の右端), **Petersen 族** とも呼ばれる. この事実は 1980 年代中盤には既に知られていたが [52], これら7個で全てであることを Robertson-Seymour-Thomas が 1995 年に示した. 証明には, 2編の「準備の論文」を含む全3編の論文を要し, 費やされた紙数はちょうど 100 頁に及ぶ. 従って, 絡み目内在性については, 次が成り立つ.

**定理 3.2.** ([50]) グラフ  $G$  が絡み目内在であるための必要十分条件は,  $G$  が Petersen 族のいずれかのグラフをマイナーに持つことである.

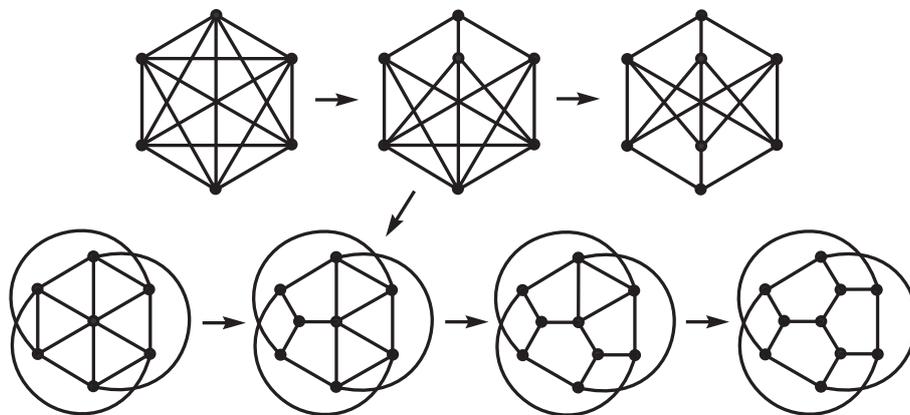


図 3.2.2: Petersen 族. 各矢印は  $\Delta Y$  変換を表す.

一方, 結び目内在性に関しては様相が異なる. まず,  $Y\Delta$  変換は定理 3.2 の帰結として絡み目内在性を保存するが, 結び目内在性を一般に保存しない. 実際, 例えば  $K_7$  から有限回の  $\Delta Y$  変換,  $Y\Delta$  変換で 20 個のグラフが得られ (Heawood グラフと呼ばれるグラフを含んでいることから, **Heawood 族**とも呼ばれる), そのうち  $\Delta Y$  変換のみで得られる 14 個は結び目内在かつマイナーミニマルだが [32],  $Y\Delta$  変換も必要とする残り 6 個については結び目内在でない [7]. また,  $K_7$  から  $\Delta Y$  変換,  $Y\Delta$  変換では得られないマイナーミニマルな結び目内在グラフも存在し, 2000 年代に 27 個発見され [10], [11], 更に 2010 年代に入り, 計算機探索によって新たに 223 個が大量に発見された [14], [6, §2]. 以上により, マイナーミニマルな結び目内在グラフは 2019 年 8 月の時点で 264 個が知られていて, 完全決定への道筋はついていないのが現状である.

絡み目内在性/結び目内在性の亜種もいろいろと研究されている. 絡み目内在性は,  $m \geq 3$  として自然に  $m$  成分絡み目内在性に一般化される [8], [9]. また, 前述の Heawood 族のグラフで  $\Delta Y$  変換のみでは得られない 6 個は結び目内在でも 3 成分絡み目内在でもないが, その空間グラフは非自明結び目か「どの 2 成分部分絡み目も非分離であるような 3 成分絡み目」のいずれかを必ず含むことが知られている [16]. このように空間グラフの内在性は実は多種多様で, まだ多くの謎に包まれている. 一方, これらを含めた概念として, グラフ  $G$  が非自明内在であるとは, その任意の空間グラフ  $f(G)$  に対し,  $G$  のある平面的な部分グラフ  $H$  が存在して,  $f(H)$  は非自明であるときをいう (平面的グラフ  $H$  の位相型は問わない). 非自明内在なグラフは必ず絡み目内在であることが知られており [41], この意味で絡み目内在性は普遍性を持っている.<sup>15</sup>

### 3.3. Conway-Gordon の定理の精密化と一般化

次に, 定理 3.1 を, 空間グラフ内の結び目・絡み目を代数的不変量で縛るという立場から拡張することを考えよう. 方向としては, 頂点数  $n$  の完全グラフ  $K_n$  への一般化, 2 を法とする合同式の更なる精密化, の 2 つが考えられる. まず,  $K_6$  に関する Conway-Gordon の定理の直接の精密化について述べる.

**定理 3.3.** ([42])  $K_6$  の任意の空間埋め込み  $f$  において,

$$2 \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_6)} a_2(f(\gamma)) = \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - 1. \quad (3.3.1)$$

(3.3.1) の両辺の mod 2 を取ると定理 3.1 (1) が得られる. 即ち, 定理 3.3 は,  $K_6$  に関する Conway-Gordon の定理を mod 0 に持ち上げて精密化したものである.

定理 3.3 の証明の鍵となるのは,  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  の空間グラフについて成り立つ次の事実である. いま,  $G = K_5$ ,  $K_{3,3}$  の空間埋め込み  $f$  に対し,  $G$  のサイクルの集合  $\Gamma'$  を  $G = K_5$  のとき  $\Gamma' = \Gamma_5(K_5)$ ,  $G = K_{3,3}$  のとき  $\Gamma' = \Gamma_6(K_{3,3})$  として,

$$\alpha(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma'} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(G)} a_2(f(\gamma)) \quad (3.3.2)$$

を  $f$  の  $\alpha$  不変量という [58]. このとき, 例 1.2 で述べた Simon 不変量と  $\alpha$  不変量との間に, 次の関係式が成り立つ.

<sup>15</sup> 例えば結び目内在グラフや,  $m(\geq 3)$  成分絡み目内在グラフは全て絡み目内在である.

定理 3.4. ([44] (本質的には [39]))  $K_5$  または  $K_{3,3}$  の空間埋め込み  $f$  において,

$$\alpha(f) = \frac{\mathcal{L}(f)^2 - 1}{8}. \quad (3.3.3)$$

Simon 不変量  $\mathcal{L}(f)$  は奇数値で, (3.3.3) の左辺は非負整数  $0, 1, 3, 6, 10, \dots$  しか取らない. このことから,  $K_5$  及び  $K_{3,3}$  は結び目内在でも絡み目内在でもないけれども, その空間グラフの結び目成分たちは互いに独立でないことがわかる.<sup>16</sup>

定理 3.4 の証明は以下のように成される. いま, グラフ  $G$  の 2 つの空間埋め込み  $f, g$  がホモログスであるとは,  $f(G)$  と  $g(G)$  がアンビエント・イソトピーとデルタ変形



で移りあうときをいう.<sup>17</sup> 2成分有向絡み目の絡み数や,  $K_5$  及び  $K_3$  の空間埋め込みの Simon 不変量 及び  $\alpha$  不変量はホモロジー不変量である [39]. そこで  $f$  を  $G = K_5, K_{3,3}$  の空間埋め込みとすると, ある整数  $m$  が存在して,  $f$  は図 3.3.3 の空間埋め込み  $h_m$  にホモログスである [59]. ここで整数  $k$  に対し, ボックス  $\boxed{k}$  は,  $k \geq 0$  のとき  $k$  回の半捻り  $\infty \dots \infty$  を表し,  $k < 0$  のとき  $-k$  回の半捻り  $\infty \dots \infty$  を表す. このとき,  $f$  の Simon 不変量は

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(h_m) = 2m + 1 \quad (3.3.4)$$

である. 一方,  $h_m(K_5)$  が含む非自明 (かもしれない) 結び目は, 4 サイクル結び目  $h_m([1243])$ , 5 サイクル結び目  $h_m([12543])$ ,  $h_m([12435])$  でいずれも  $(2, 2m + 1)$ -トーラス結び目 (図 3.3.3 の右図) であり,  $h_m(K_{3,3})$  が含む非自明 (かもしれない) 結び目は Hamilton 結び目  $h_m([125463])$  のみで, これも  $(2, 2m + 1)$ -トーラス結び目である.  $(2, 2m + 1)$ -トーラス結び目の  $a_2$  の値は  $m(m + 1)/2$  であることに注意して,  $K_5, K_{3,3}$  いずれの場合も

$$\alpha(f) = \alpha(h_m) = \frac{m(m + 1)}{2} \quad (3.3.5)$$

となることがわかる. そこで (3.3.4), (3.3.5) から

$$\alpha(f) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{L}(f) - 1}{2} \right) \left( \frac{\mathcal{L}(f) - 1}{2} + 1 \right) = \frac{\mathcal{L}(f)^2 - 1}{8}$$

が得られる.

定理 3.4 の証明の肝は, 空間グラフのホモロジー不変量を結び目成分の  $a_2$  を用いて構成し, そこにホモロジー完全分類を適用して一般的な関係式を得るところである. 任意の  $n$  について  $K_n$  の空間グラフの全てのホモロジー類が明示的にわかっていることから [55], [40], このアイデアを  $K_6$  の空間グラフに適用する.  $f$  を  $K_6$  の空間埋め込みとすると, ある整数  $m_i, n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) が存在して,  $f$  は図 3.3.4 の空間埋め込み  $h$  にホモログスである.  $K_6$  はちょうど 6 個の  $K_5$  に同型な部分グラフ  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), ちょうど 10 個の  $K_{3,3}$  に同型な部分グラフ  $H_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 10$ ) を含み,

$$\sum_{j=1}^{10} \mathcal{L}(h|_{H_j})^2 - \sum_{i=1}^6 \mathcal{L}(h|_{G_i})^2 = 4 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(h(\lambda))^2 \quad (3.3.6)$$

<sup>16</sup> 一般に, 空間グラフの結び目成分が互いに独立かどうかを調べる問題を, 結び目に関する順応性の問題という. 詳細は [60] を参照.

<sup>17</sup> はじめは絡み目のリンクホモロジーの空間グラフへの拡張として 4 次元的に定義され [57], 後にここで述べた定義と同値になることが示された [39].

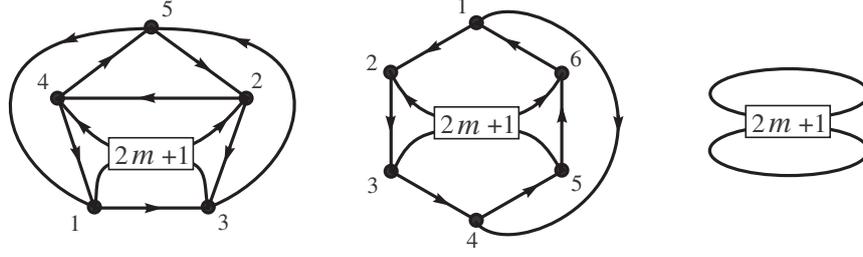


図 3.3.3:  $h_m(K_5)$ ,  $h_m(K_{3,3})$ ,  $(2, 2m+1)$ -トーラス結び目

が成り立つことが直接の計算で示される. 任意の部分グラフ  $H$  に対し  $f|_H$  と  $h|_H$  もホモログスなので, (3.3.6) は  $f$  についても成り立つ. 即ち

$$\sum_{j=1}^{10} \mathcal{L}(f|_{H_j})^2 - \sum_{i=1}^6 \mathcal{L}(f|_{G_i})^2 = 4 \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2 \quad (3.3.7)$$

となる. そこで各  $\mathcal{L}(f|_{H_i})^2$ ,  $\mathcal{L}(f|_{G_j})^2$  に (3.3.3) を適用し整理すると, (3.3.7) から

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_6)} \text{lk}(f(\lambda))^2 &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} (8\alpha(f|_{H_j}) + 1) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^6 (8\alpha(f|_{G_i}) + 1) \\ &= 2 \left( \sum_{j=1}^{10} \alpha(f|_{H_j}) - \sum_{i=1}^6 \alpha(f|_{G_i}) \right) + 1 \\ &= 2 \sum_{j=1}^{10} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_6(H_j)} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(H_j)} a_2(f(\gamma)) \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^6 \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_5(G_i)} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_4(G_i)} a_2(f(\gamma)) \right) + 1 \\ &= 2 \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_4(K_6)} a_2(f(\gamma)) \right) \\ &\quad - 2 \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_6)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_4(K_6)} a_2(f(\gamma)) \right) + 1 \\ &= 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_6)} a_2(f(\gamma)) + 1 \end{aligned}$$

となり, 定理 3.3 が得られる.

更に最近, 定理 3.3 は mod 0 のままで頂点数  $n \geq 6$  の場合に以下のように一般化されることが示された.

**定理 3.5.** ([35])  $n \geq 6$  のとき,  $K_n$  の任意の空間埋め込み  $f$  において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - (n-5)! \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_n)} a_2(f(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left( \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - \binom{n-1}{5} \right).$$

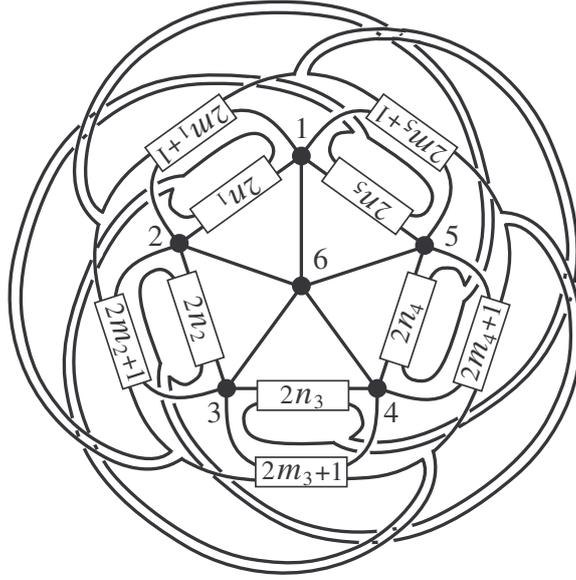


図 3.3.4:  $K_6$  の空間グラフ  $h(K_6)$

即ち,  $f(K_n)$  が含む Hamilton 結び目の  $a_2$  の総和は, いかなる  $n \geq 6$  についても, 5 サイクル結び目の  $a_2$  の総和と, 2つの3サイクルの非交和がなす絡み目 (以下では (3,3) 絡み目と略す) の  $lk^2$  の総和のみで明示的に表される. これにより,  $f(K_n)$  の Hamilton 結び目の振る舞いがいろいろとわかるようになった. まず定理3.1 (1)により,  $f(K_n)$  の (3,3) 絡み目の  $lk^2$  の総和は,  $K_n$  の  $K_6$  に同型な部分グラフの個数  $\binom{n}{6}$  以上であることを注意して, 定理3.5から以下の系が得られる.

系 3.6.  $n \geq 6$  のとき,  $K_n$  の任意の空間埋め込み  $f$  において,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - (n-5)! \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_n)} a_2(f(\gamma)) \geq \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!}.$$

注意 3.7.  $K_n$  の空間埋め込み  $g$  で,  $g(K_n)$  が含む全ての非分離 (3,3) 絡み目はちょうど  $\binom{n}{6}$  個の Hopf 絡み目であるものが存在する [47]. 従って系3.6の下界は最良である. 更に  $g(K_n)$  の全ての5サイクル結び目は自明なので, 特に

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) = \frac{(n-5)!}{2} \left( \binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) = \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \quad (3.3.8)$$

が得られる.  $(n-1)!/2$  個の Hamilton 結び目たちの結び目型の内訳を知らずとも, それらの  $a_2$  の総和がわかったことに注目しよう.

例 3.8. 定理3.5の応用が最も直接的に見出せる空間グラフのクラスとして, 線形空間グラフがある. これは各辺が  $\mathbb{R}^3$  の (まっすぐな) 線分であるような空間グラフのことで, 分子トポロジーにおいて分子化合物の数学的モデルとして自然に現れる対象である (例えば [1, §7] を参照). 特に  $K_n$  は線形空間グラフを持つ. 実際, 各頂点を  $\mathbb{R}^3$  内の曲線  $(t, t^2, t^3)$  上に置き, 異なるどの2頂点も1本の線分で結べばよい (図3.3.5). 非自明結び目を折れ線で表現するとき少なくとも6本の線分が必要であることから,  $K_n$  の線形

空間グラフの5サイクル結び目は全て自明である. 従って, 線形空間グラフ  $f(K_n)$  に対しては, 系 3.6 から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \geq \frac{(n-5)(n-6)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \quad (3.3.9)$$

が成り立つ. 一方,  $K_6$  の任意の線形空間グラフが含む Hopf 絡み目の個数は1個または3個であることが知られていて [21], [22], [42], これより  $f(K_n)$  の  $(3,3)$  絡み目の  $\text{lk}^2$  の総和は  $3\binom{n}{6}$  以下となる. 従って定理 3.5 から

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) &\leq \frac{(n-5)!}{2} \left( 3\binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) \\ &= \frac{3(n-2)(n-5)(n-1)!}{2 \cdot 6!} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

もわかる. このように, 線形空間グラフの Hamilton 結び目の振る舞いにかかる強い制限が, 定理 3.5 の応用で抽出できた.<sup>18</sup>

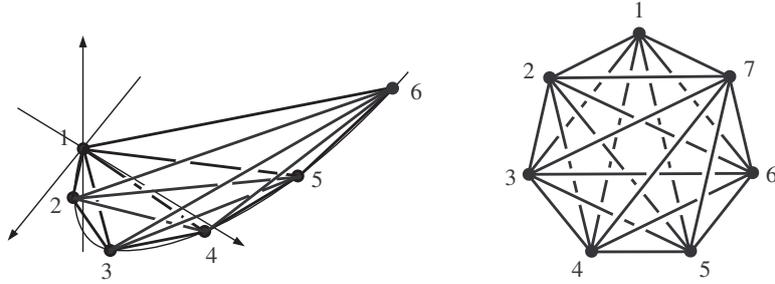


図 3.3.5:  $K_n$  の線形空間グラフの例 ( $n = 6, 7$ )

次に,  $n \geq 7$  のとき,  $K_n$  の空間グラフ  $f(K_n), g(K_n)$  において, それぞれの Hamilton 結び目の  $a_2$  の総和の差の  $\text{mod } (n-5)!$  を取ると, 定理 3.5 から

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) \\ &\equiv \frac{(n-5)!}{2} \left( \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(f(\lambda))^2 - \sum_{\lambda \in \Gamma_{3,3}(K_n)} \text{lk}(g(\lambda))^2 \right) \pmod{(n-5)!} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

となるが,  $f(K_n), g(K_n)$  の  $(3,3)$  絡み目の  $\text{lk}^2$  の総和は, 定理 3.1 (1) からいずれも  $\text{mod } 2$  で  $\binom{n}{6}$  に合同なので, その差は偶数である. 従って (3.3.11) から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(g(\gamma)) \pmod{(n-5)!} \quad (3.3.12)$$

<sup>18</sup>更に以下の応用もある:  $K_6$  の線形空間グラフ  $f(K_6)$  について, (3.3.10) から  $\sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_6)} a_2(f(\gamma)) = 0, 1$  となる. 6本の線分からなる非自明結び目は三葉結び目に限ることと  $a_2(\text{三葉結び目}) = 1$  から,  $f(K_6)$  が含む非自明結び目は三葉結び目が0個か1個である. また  $K_7$  の線形空間グラフ  $f(K_7)$  について, (3.3.9) から  $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \geq 1$  となる. 7本の線分からなる非自明結び目は三葉結び目と8の字結び目に限ることと  $a_2(8\text{の字結び目}) = -1$  から,  $f(K_7)$  は必ず三葉結び目を含む. これらは [22], [2], [49] において組合せ的手法により示されていた事実の位相的別証明である.

となる. 即ち,  $f(K_n)$  の Hamilton 結び目の  $a_2$  の総和は  $\text{mod } (n-5)!$  で埋め込み  $f$  に依らない. そこで  $g$  として注意 3.7 の空間埋め込み  $g$  を選べば, (3.3.8) と (3.3.12) から

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \frac{(n-5)!}{2} \left( \binom{n}{6} - \binom{n-1}{5} \right) \pmod{(n-5)!} \quad (3.3.13)$$

が任意の空間埋め込み  $f$  について成り立つ.  $\binom{n}{6} \equiv 1 \pmod{2}$  と  $n \equiv 6, 7 \pmod{8}$ ,  $\binom{n-1}{5} \equiv 1 \pmod{2}$  と  $n \equiv 0, 6 \pmod{8}$  がそれぞれ同値であることを注意して, 以下の系が得られる.

**系 3.9.**  $n \geq 7$  のとき,  $K_n$  の任意の空間埋め込み  $f$  において, 次の  $\text{mod } (n-5)!$  の合同式が成り立つ:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv \begin{cases} -\frac{(n-5)!}{2} \binom{n-1}{5} & (n \equiv 0 \pmod{8}) \\ 0 & (n \not\equiv 0, 7 \pmod{8}) \\ \frac{(n-5)!}{2} \binom{n}{6} & (n \equiv 7 \pmod{8}). \end{cases}$$

例えば  $n = 7$  のときは  $\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 7 \equiv 1 \pmod{2}$  となり, これは  $K_7$  に関する Conway-Gordon の定理そのものである. 一方,  $n = 8$  のときは  $\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_8)} a_2(f(\gamma)) \equiv 3 \pmod{6}$  が [12], [19], また  $n \geq 9$  のときは  $\sum_{\gamma \in \Gamma_n(K_n)} a_2(f(\gamma)) \equiv 0 \pmod{2}$  が知られていたが [19], これらは全て系 3.9 に含まれる.

完全グラフではないグラフの「Conway-Gordon 型公式」についてもいろいろ研究されている [17], [18], [46]. §3.2 において絡み目内在性/結び目内在性が  $\Delta Y$  変換で保存されることを述べたが, グラフ  $G_Y$  が  $G_\Delta$  から  $\Delta Y$  変換で得られるとき,  $G_\Delta$  の空間グラフの「Conway-Gordon 型公式」から  $G_Y$  の空間グラフの同公式を見出す組織的方法が与えられている [45]. 従って定理 3.5 により,  $K_n$  から  $\Delta Y$  変換の有限列で得られる全てのグラフについて, Conway-Gordon 型公式が得られることになる.

## 参考文献

- [1] C. C. Adams, The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots. Revised reprint of the 1994 original. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2004.
- [2] A. F. Brown, Embeddings of graphs in  $E^3$ , Ph. D. Dissertation, Kent State University, 1977.
- [3] J. H. Conway and C. McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.
- [4] R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to knot theory, Reprint of the 1963 original, Graduate Texts in Mathematics **57**, *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1977.
- [5] R. Diestel, Graph theory, Graduate Texts in Mathematics **173**, *Springer-Verlag, New York*, 1997. 邦訳: 根上生也/太田克弘 訳, グラフ理論, シュプリンガー・ジャパン, 2000.
- [6] E. Flapan, T. Mattman, B. Mellor, R. Naimi and R. Nikkuni, Recent developments in spatial graph theory, *Knots, links, spatial graphs, and algebraic invariants*, 81–102, *Contemp. Math.*, 689, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2017.
- [7] E. Flapan and R. Naimi, The Y-triangle move does not preserve intrinsic knottedness, *Osaka J. Math.* **45** (2008), 107–111.
- [8] E. Flapan, R. Naimi and J. Pommersheim, Intrinsically triple linked complete graphs, *Topology Appl.* **115** (2001), 239–246.
- [9] E. Flapan, J. Pommersheim, J. Foisy and R. Naimi, Intrinsically  $n$ -linked graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), 1143–1154.

- [10] J. Foisy, Intrinsically knotted graphs, *J. Graph Theory* **39** (2002), 178–187.
- [11] J. Foisy, A newly recognized intrinsically knotted graph, *J. Graph Theory* **43** (2003), 199–209.
- [12] J. Foisy, Corrigendum to: “Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs” by P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, *New York J. Math.* **14** (2008), 285–287.
- [13] H. Goda, Bridge index for theta curves in the 3-sphere, *Topology Appl.* **79** (1997), 177–196.
- [14] N. Goldberg, T. W. Mattman and R. Naimi, Many, many more intrinsically knotted graphs, *Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014), 1801–1823.
- [15] C. McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 371–415.
- [16] R. Hanaki, R. Nikkuni, K. Taniyama and A. Yamazaki, On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, *Pacific J. Math.* **252** (2011), 407–425.
- [17] H. Hashimoto and R. Nikkuni, On Conway-Gordon type theorems for graphs in the Petersen family, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350048.
- [18] H. Hashimoto and R. Nikkuni, Conway-Gordon type theorem for the complete four-partite graph  $K_{3,3,1,1}$ , *New York J. Math.* **20** (2014), 471–495.
- [19] Y. Hirano, Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs, Doctor Thesis, Niigata University, 2010.
- [20] K. Horie, T. Kitano, M. Matsumoto and M. Suzuki, A partial order on the set of prime knots with up to 11 crossings, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011), 275–303.
- [21] C. Hughes, Linked triangle pairs in a straight edge embedding of  $K_6$ , *Pi Mu Epsilon J.* **12** (2006), 213–218.
- [22] Y. Huh and C. Jeon, Knots and links in linear embeddings of  $K_6$ , *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), 661–671.
- [23] A. Ishii, Moves and invariants for knotted handlebodies, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008), 1403–1418.
- [24] 石井敦, ハンドル体結び目とカンドル理論の発展, *数学*, **70** (2018), 63–80.
- [25] A. Ishii, R. Nikkuni and K. Oshiro, On calculations of the twisted Alexander ideals for spatial graphs, handlebody-knots and surface-links, *Osaka J. Math.* **55** (2018), 297–313.
- [26] K. Kanno and K. Taniyama, Braid presentation of spatial graphs, *Tokyo J. Math.* **33** (2010), 509–522.
- [27] L. H. Kauffman, Invariants of graphs in three-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989) 697–710.
- [28] A. Kawauchi, Almost identical imitations of  $(3, 1)$ -dimensional manifold pairs, *Osaka J. Math.* **26** (1989), 743–758.
- [29] S. Kinoshita, On elementary ideals of polyhedra in the 3-sphere, *Pacific J. Math.* **42** (1972), 89–98.
- [30] 北野晃朗・合田洋・森藤孝之, ねじれ Alexander 不変量, *数学メモアール*, **5**, 日本数学会, 2006.
- [31] T. Kitano and M. Suzuki, A partial order in the knot table, *Experiment. Math.* **14** (2005), 385–390.
- [32] T. Kohara and S. Suzuki, Some remarks on knots and links in spatial graphs, *Knots 90 (Osaka, 1990)*, 435–445, *de Gruyter, Berlin*, 1992.
- [33] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* **15** (1930), 271–283.
- [34] W. Mason, Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 269–290.
- [35] H. Morishita and R. Nikkuni, Generalizations of the Conway-Gordon theorems and intrinsic knotting on complete graphs, *J. Math. Soc. Japan*, to appear. (arXiv:math.1807.02805)
- [36] H. Moriuchi, An enumeration of theta-curves with up to seven crossings, *J. Knot Theory Ramifications* **18** (2009), 167–197.
- [37] H. Moriuchi, A table of handcuff graphs with up to seven crossings, *Knot Theory for Scientific Objects, OCAMI Studies* **1**, 179–200, Osaka Municipal Universities Press, 2007.
- [38] T. Motohashi, 2-bridge  $\theta$ -curves in  $S^3$ , *Topology Appl.* **108** (2000), 267–276.

- [39] T. Motohashi and K. Taniyama, Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in  $R^3$ , *KNOTS '96 (Tokyo)*, 185–200, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1997.
- [40] R. Nikkuni, The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), 387–411.
- [41] R. Nikkuni, An intrinsic nontriviality of graphs, *Algebr. Geom. Topol.* **9** (2009), 351–364.
- [42] R. Nikkuni, A refinement of the Conway-Gordon theorems, *Topology Appl.* **156** (2009), 2782–2794.
- [43] R. Nikkuni, Y. Ozawa and M. Suzuki, in preparation.
- [44] R. Nikkuni and K. Taniyama, Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, *Fund. Math.* **205** (2009), 219–236.
- [45] R. Nikkuni and K. Taniyama,  $\Delta Y$ -exchanges and the Conway-Gordon theorems, *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), 1250067.
- [46] D. O’Donnol, Knotting and linking in the Petersen family, *Osaka J. Math.* **52** (2015), 1079–1100.
- [47] T. Otsuki, Knots and links in certain spatial complete graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **68** (1996), 23–35.
- [48] M. Ozawa and Y. Tsutsumi, Primitive spatial graphs and graph minors, *Rev. Mat. Complut.* **20** (2007), 391–406.
- [49] J. L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs and oriented matroids: the trefoil, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999), 149–158.
- [50] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Sachs’ linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.
- [51] D. Rolfsen, Knots and links. Mathematics Lecture Series, No. 7. *Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif.*, 1976.
- [52] H. Sachs, On spatial representations of finite graphs, *Finite and infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981)*, 649–662, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, **37**, *North-Holland, Amsterdam*, 1984.
- [53] M. Scharlemann and A. Thompson, Detecting unknotted graphs in 3-space, *J. Diff. Geom.* **34** (1991), 539–560.
- [54] T. Shinnoki and T. Takamuki, On the braid index of  $\theta_m$ -curve in 3-space, *Math. Nachr.* **260** (2003), 84–92.
- [55] M. Suzuki, Classification of the spatial-graph homology classes of a complete graph, Master thesis, Tokyo Denki University, 1996 (in Japanese).
- [56] S. Suzuki, On linear graphs in 3-sphere, *Osaka J. Math.* **7** (1970), 375–396.
- [57] K. Taniyama, Cobordism, homotopy and homology of graphs in  $\mathbf{R}^3$ , *Topology* **33** (1994), 509–523.
- [58] K. Taniyama, Link homotopy invariants of graphs in  $\mathbf{R}^3$ , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **7** (1994), 129–144.
- [59] K. Taniyama, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topology Appl.* **65** (1995), 205–228.
- [60] K. Taniyama and A. Yasuhara, Realization of knots and links in a spatial graph, *Topology Appl.* **112** (2001), 87–109.
- [61] T. Tsuno, Bridge index for spatial  $\theta_n$ -curves with local knots, *Topology Appl.* **129** (2003), 159–176.
- [62] M. Wada, Twisted Alexander polynomial for finitely presentable group, *Topology* **33** (1994), 241–256.
- [63] Y. Q. Wu, Minimally knotted embeddings of planar graphs, *Math. Z.* **214** (1993), 653–658.
- [64] W. T. Wu, On the isotopy of complexes in a euclidean space. I, *Acta Math. Sinica* **9** (1959), 475–493.
- [65] S. Yamada, An invariant of spatial graphs, *J. Graph Theory* **13** (1989), 537–551.
- [66] D. N. Yetter, Category theoretic representations of knotted graphs in  $S^3$ , *Adv. Math.* **77** (1989), 137–155.
- [67] Y. Yokota, Topological invariants of graphs in 3-space, *Topology* **35** (1996), 77–87.