

# 結び目成分のバンド和による空間手錠グラフの不変量について\*

新國 亮 †

本講演は、筆者の最近のプレプリント [6] の紹介です。PDF ファイルを以下の URL からダウンロードすることができます。

[http://www.edu.waseda.ac.jp/~nikkuni/handcuff\\_inv.pdf](http://www.edu.waseda.ac.jp/~nikkuni/handcuff_inv.pdf)

## 1. 空間 $n$ 手錠グラフ

**定義 1.1.** 有限グラフ  $G$  の  $S^3$  への埋め込みを、 $G$  の空間埋め込みまたは単に空間グラフと呼ぶ。平面的グラフ  $G$  に対し、その空間埋め込みが自明であるとは、 $S^3$  内で平面グラフにアンビエント・アイソトピックであるときをいう。

**定義 1.2.** 図 1.1 のグラフ  $H_n$  を  $n$  手錠グラフと呼び、その空間埋め込み  $f: H_n \rightarrow S^3$  を空間  $n$  手錠グラフと呼ぶ(ことにする)。特に  $n = 2$  の場合は、 $e_1 \cup e_2$  を  $e$  と書き、空間 2 手錠グラフを単に空間手錠グラフと呼ぶ。 $H_n$  の各サイクル  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  は向き付けられているとし、空間  $n$  手錠グラフ  $f$  に対し、各  $k$  成分有向絡み目  $f(\gamma_{i_1} \cup \gamma_{i_2} \cup \dots \cup \gamma_{i_k})$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, 1 \leq k \leq n$ ) を  $f$  の絡み目成分と呼ぶ。特に各有向結び目  $f(\gamma_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を  $f$  の結び目成分と呼ぶ。

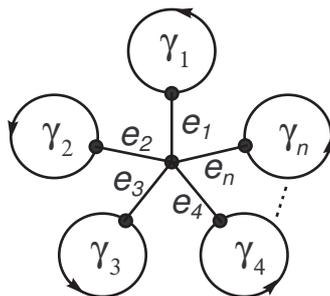


図 1.1.  $n$  手錠グラフ  $H_n$

空間  $n$  手錠グラフの結び目成分や絡み目成分は、最も自然な不変量であるが、**完全不変量ではない**。実際に図 1.1 の空間手錠グラフ及び空間 3 手錠グラフは、全ての結び目成分及び絡み目成分が自明であるが、それ自身は非自明であることが知られている。このよう

\*関西低次元トポロジー若手セミナー, 2005 年 1 月 18 日

†日本学術振興会特別研究員 (PD)

な空間グラフの極小非自明性<sup>1</sup>の判定は、重要な研究課題であり、多種多様なアプローチが成されているが、ここでは、特に空間手錠グラフ及び空間3手錠グラフにおいて、極小非自明性の判定に有効な不変量を、結び目成分を用いて構成することを考える。

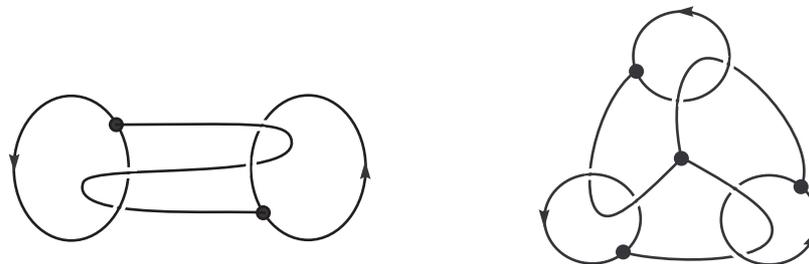


図 1.2. 極小非自明な空間手錠グラフ, 空間3手錠グラフ

## 2. 結び目成分のバンド和を用いた不変量

**定義 2.1.**  $n$ 成分有向順序絡み目  $L = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_n$  に対し、図 2.1 のような、 $S^3$  内の向き付けられた円板  $D$  を用意する。  $D$  は  $2n$  角形で、1 辺おきに  $x_1, x_2, \dots, x_n$  というラベルがこの順序で貼られており、かつこれらには  $D$  から誘導される向きが入っている。いま、この円板  $D$  を、  $x_1, x_2, \dots, x_n$  で  $J_1, J_2, \dots, J_n$  に、互いの向きが逆調するように、かつ  $D \cap L = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n$  となるように貼り付けて、結び目  $K_D^{12 \dots n} = L \cup \partial D - \cup_{i=1}^n \text{int} x_i$  を得る。これを  $L$  の  $D$  和と呼ぶ。  $L$  の  $D$  和の取り方は無数にあることに注意する。

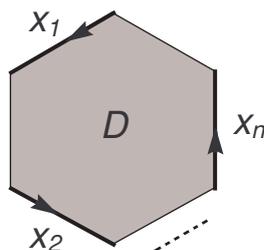


図 2.1.

**定義 2.2.** 空間  $n$  手錠グラフ  $f$  に対し、絡み目成分  $f(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n)$  を  $L_f$  と書く。このとき、  $L_f$  の  $f(e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_n)$  に沿った  $D$  和を  $K_D^{12 \dots n}(f)$  と書き、これを  $f$  に関する  $L_f$  の  $D$  和と呼ぶ。

<sup>1</sup> 一般に、平面的グラフの空間埋め込みは、全ての空間真部分グラフが自明であるとき概自明であるといい、更にそれ自身は非自明であるなら極小非自明であるという。

(1) 空間手錠グラフ  $f$  に対し,

$$n_{12}(f, D) = a_2(K_D^{12}(f)) - a_2(f(\gamma_1)) - a_2(f(\gamma_2))$$

とおく. ここで結び目  $J$  に対し,  $a_2(J)$  は  $J$  の **Conway 多項式**  $\nabla_J(z)$  の  $z^2$  の係数を表す.  $n_{12}(f, D)$  を  $\text{lk}(L_f)$  を法として約分したものを  $\bar{n}_{12}(f)$  と定義する.

(2) 空間3手錠グラフ  $f$  に対し,  $f$  に関する  $L_f$  の  $D$  と  $K_D^{123}(f)$  を考える. この  $D$  を用いて,  $f(\gamma_3)$ ,  $f(\gamma_1)$  及び  $f(\gamma_2)$  をそれぞれ “忘れる” ことにより,  $f(\gamma_1) \cup f(\gamma_2)$ ,  $f(\gamma_2) \cup f(\gamma_3)$ , 及び  $f(\gamma_1) \cup f(\gamma_3)$  の  $D$  と  $K_D^{12}(f)$ ,  $K_D^{23}(f)$  そして  $K_D^{13}(f)$  をそれぞれ得る. このとき,

$$n_{123}(f, D) = -v_3(K_D^{123}(f)) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} v_3(K_D^{ij}(f)) - \sum_{i=1}^3 v_3(f(\gamma_i))$$

とおく. ここで結び目  $J$  に対し,  $v_3(J) = (1/36)V_J^{(3)}(1)$  であり,  $V_J^{(3)}(1)$  は  $J$  の **Jones 多項式**  $V_J(t)$  の 1 における 3 階微分係数を表す. 更に,  $n_{123}(f, D)$  を  $L_f$  の Milnor による **3 重絡み数**  $\bar{\mu}_{123}(L_f)$  を法として約分したものを  $\bar{n}_{123}(f)$  と定義する. ここで  $\bar{\mu}_{123}(L_f)$  は, 各 2 成分部分絡み目の絡み数の最大公約数を法として定義されていることに注意する.

**定理 2.3.** (1)  $\bar{n}_{12}(f)$  は空間手錠グラフ  $f$  の不変量である.

(2)  $\bar{n}_{123}(f)$  は空間3手錠グラフ  $f$  の不変量である.

定義から, 例えば空間手錠グラフ  $f$  に対し,  $L_f$  が **Hopf 絡み目** だったり, あるいは空間3手錠グラフ  $f$  に対し,  $L_f$  が **Borromean 環** だったりすると, これらの不変量は全く役に立たない. しかし  $L_f$  が絡み目ホモトピーの下で自明であれば, これらの不変量は整数値として定まり, 有用な不変量となる.

**例 2.4.** (1) 図 1.2 の空間手錠グラフ  $f$  に対し,  $\bar{n}_{12}(f) = 2$  である. 従って  $f$  は非自明である.

(2) 図 1.2 の空間手錠グラフ  $f$  に対し,  $\bar{n}_{123}(f) = 1$  である. 従って  $f$  は非自明である.

### 3. 空間グラフの $\Delta$ 辺ホモトピーへの応用

**定義 3.1.** 空間グラフ上の図 3.1 の局所変形を  **$\Delta$  変形** といい, 特に 3 本の弧が同じ辺に属しているとき, **自己  $\Delta$  変形** と呼ぶ. グラフ  $G$  の 2 つの空間埋め込み  $f$  と  $g$  が  **$\Delta$  辺ホモトピック** [3] であるとは,  $f$  と  $g$  が自己  $\Delta$  変形とアンビエント・アイソトピーで移りあうときをいう. 特に  $G$  が  $S^1$  の非交和と同相の場合, これは有向順序絡み目の **自己  $\Delta$  同値** [8] と一致する.

有向順序絡み目の自己  $\Delta$  同値において, 渋谷は以下の予想を挙げた.

**予想 3.2.** (1) ([8]) 互いに **コボルダント** な 2 つの絡み目は, 自己  $\Delta$  同値であろう.

(2) ([9]) **境界絡み目** は, 自己  $\Delta$  同値の下で自明であろう.

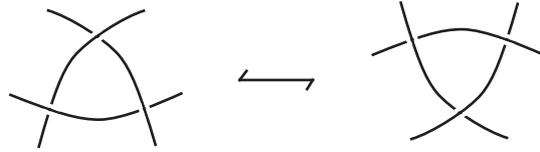


図 3.1.

予想 3.2 (1) に対し, 渋谷は同時に, 部分的解答として, **リボン絡み目**は自己  $\Delta$  同値の下で自明であることを示したが [8], 後に渋谷-中西により, Hopf 絡み目にコボルダントだが, 自己  $\Delta$  同値ではない 2 成分絡み目の存在が示され [1], 予想 3.2 (1) は否定的に解決された. 更に最近, 渋谷-中西-安原により, Borromean 環にコボルダントだが, 自己  $\Delta$  同値ではない 3 成分絡み目の存在も示されている [2]. また, 予想 3.2 (2) に対しては, 渋谷は同時に, 2 成分境界絡み目は自己  $\Delta$  同値の下で自明であることを示したが [9], 最近, 渋谷-安原により, 任意の成分の境界絡み目について肯定的に解決された [10].

コボルディズムの概念は, 谷山により自然に空間グラフに拡張され [11], 特に平面的グラフに対し, 自明な埋め込みにコボルダントな空間埋め込みを**スライス**であるという. また, 境界絡み目の概念も, 筆者-新庄により, 以下のように空間グラフに拡張されている [7]. いま, グラフ  $G$  の全てのサイクルを  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  とおくと,  $G$  の空間埋め込み  $f$  が  $G$  の**境界空間埋め込み**または**境界空間グラフ**であるとは,  $S^3$  内の向き付けられたコンパクト曲面  $S_1, S_2, \dots, S_n$  が存在して, (1)  $f(G) \cap S_i = f(G) \cap \partial S_i = f(\gamma_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), (2) 相異なる  $i, j$  に対し,  $\text{int} S_i \cap \text{int} S_j = \emptyset$  を満たすときをいう. そこで以下の問題を考えることは自然である.

**問題 3.3.** (1) スライス空間グラフは  $\Delta$  辺ホモトピーの下で自明であるか?  
 (2) 境界空間グラフは  $\Delta$  辺ホモトピーの下で自明であるか? <sup>2</sup>

特に**空間  $\theta$  曲線**の場合は, 筆者により, 互いにコボルダントな 2 つの空間  $\theta$  曲線は  $\Delta$  辺ホモトピックであり, また境界空間  $\theta$  曲線は  $\Delta$  辺ホモトピーの下で自明であることが示されている [4]. しかし, 一般には問題 3.3 はどちらも**否定的に解決される**.

**定理 3.4.** (1)  $\Delta$  辺ホモトピーの下で非自明なスライス空間グラフが存在する.  
 (2)  $\Delta$  辺ホモトピーの下で非自明な境界空間グラフが存在する.

ここで用いるのが, 第 1, 2 節で説明した空間  $n$  手錠グラフの不変量である. スライス空間  $n$  手錠グラフや境界空間  $n$  手錠グラフの絡み目成分は, 絡み目ホモトピーで自明である為, 我々の不変量がうまく機能する. 特に,  $\Delta$  辺ホモトピーの下で非自明なスライス空間手錠グラフ, 及び  $\Delta$  辺ホモトピーの下で非自明な境界空間手錠グラフが, それぞれ無限個存在することが示される.

<sup>2</sup> 非平面的グラフは境界空間埋め込みを持たないことが知られている [7].

**注意 3.5.** (1) 問題 3.3 (1) の特別な場合である, スライス絡み目は自己  $\Delta$  同値の下で自明であるか? という問題については, 未だ未解決である.

(2)  $\Delta$  変形の代わりに  $\#$  変形を用いることで, 同様に空間グラフの  $\#$  辺ホモトピー [5] が定義される. この場合は, 筆者により, グラフ  $G$  の互いにコボルダントな 2 つの空間埋め込みは  $\#$  辺ホモトピックであり [5], また, 筆者-新庄により, 境界空間グラフは  $\#$  辺ホモトピーの下で自明であることが示されている [7].

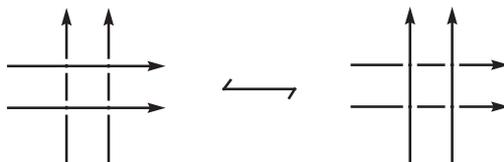


図 3.2.

## 参考文献

- [1] Y. Nakanishi and T. Shibuya, Link homotopy and quasi self delta-equivalence for links, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), 683–691.
- [2] Y. Nakanishi, T. Shibuya and A. Yasuhara, Self-delta equivalence of cobordant links, preprint.
- [3] R. Nikkuni, Delta link-homotopy on spatial graphs, *Rev. Mat. Complut.* **15** (2002), 543–570.
- [4] R. Nikkuni, Delta edge-homotopy on theta curves, to appear in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*.
- [5] R. Nikkuni, Sharp edge-homotopy on spatial graphs, to appear in *Revista Matemática Complutense*.
- [6] R. Nikkuni, Delta edge-homotopy invariants of spatial graphs via disk-summing the constituent knots, preprint.
- [7] R. Nikkuni and R. Shinjo, On boundary spatial embeddings of a graph, to appear in *The Quarterly Journal of Mathematics*.
- [8] T. Shibuya, Self  $\Delta$ -equivalence of ribbon links, *Osaka J. Math.* **33** (1996), 751–760.
- [9] T. Shibuya, On self  $\Delta$ -equivalence of boundary links, *Osaka J. Math.* **37** (2000), 37–55.
- [10] T. Shibuya and A. Yasuhara, On self  $\Delta$ -equivalence of boundary links, II, preprint.
- [11] K. Taniyama, Cobordism, homotopy and homology of graphs in  $\mathbf{R}^3$ . *Topology* **33** (1994), 509–523.

169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1

早稲田大学教育学部数学専修

nick@kurenai.waseda.jp

#### 4. 追記

- (1) 本予稿は, 2005年1月に書かれた. 同年4月に筆者は金沢大学に異動したため, 現在, プレプリント [6] のPDF ファイルは, 以下の URL に置いてある.

[http://www.ed.kanazawa-u.ac.jp/~nick/handcuff\\_inv.pdf](http://www.ed.kanazawa-u.ac.jp/~nick/handcuff_inv.pdf)

- (2) 最近, 論文 [10] に若干のギャップが見つかったことを, 渋谷 哲夫氏に教えて頂いた. なので, 任意の成分の境界絡み目が自己  $\Delta$  同値の下で自明かどうかは, まだ未解決である.

(2005年5月17日)